考试科目名称 离散数学 （期中测验）

2023—2024学年第 二 学期 考试日期2024年4月17日 考试方式 闭 卷

系（专业） 计算机科学与技术系 年级 一 班级

学号 姓名 成绩

参考解答与评分标准

得分	

一、（本题满分12分）

自定义谓词，用**谓词逻辑**语句表示下列各前提和结论的陈述，并证明结论成立.

前提：

1) 2024年春，所有大一计算机系的同学均参加了春游：玄武湖骑行。
2) 所有参加玄武湖骑行的同学要么自备了骑行车辆，要么租用了园区骑行车辆。
3) 所有租用园区骑行车辆的同学均需要交纳租用押金或者签署租用协议书。
4) 王小花同学是大一计算机系同学，并且王小花同学没有自备骑行车辆。
5) 王小花同学没有交纳租用押金。

结论：

王小花同学签署了租用协议书。

【参考解答与评分标准】

（定义各谓词：4分）$A(x)$: x为大一计算机系同学；$B(x)$: x参加玄武湖骑行；$C(x)$: x自备骑行车辆；$D(x)$: x租用园区骑行车辆；$E(x)$: x交纳了租用押金；$F(x)$: x签署了租用协议书；选择个体k：王小花

各语句翻译如下：（翻译：4分）

前提：1）$\forall x(A(x) \to B(x))$;2）$\forall x(B(x) \to C(x) \vee D(x))$;3）$\forall x(D(x) \to E(x) \vee F(x))$;4）$A(k) \wedge \neg C(k)$;5）$\neg E(k)$;结论：$F(k)$

推理过程如下（推理过程：4分，可以不写后面的说明）

① $A(k) \to B(k)$ 全称例示 from 1)
② $B(k) \to C(k) \vee D(k)$ 全称例示 from 2)
③ $A(k) \to C(k) \vee D(k)$ 假言三段论 from ①、②
④ $A(k)$ 化简 from 4）
⑤ $C(k) \vee D(k)$ 假言推理 from ③、④
⑥ $\neg C(k)$ 化简 from 4）
⑦ $D(k)$ 取拒式 from ⑤、⑥
⑧ $D(k) \to E(k) \vee F(k)$ 全称例示 from 3）

⑨ $E(k) \vee F(k)$ 假言推理 from ⑦、⑧

⑩ $\neg E(k)$ Premise 5)

⑪ $F(k)$ 取拒式 from ⑨、⑩

仅用命题逻辑证明本题最多给 4 分。

得分	

二、（本题满分 10 分）

请将下列命题翻译成谓词逻辑语句，并证明命题成立：

对于任意大于 2 的正整数n，均存在连续的n个正整数，它们均为合数。

【参考解答与评分标准】

表达：谓词$C(x)$表示x是合数，可翻译为：$\forall n(n > 2 \wedge n \in \mathbb{Z}^+) \rightarrow \left(\exists k \forall i(i > 0 \wedge i \leq k) \rightarrow i + k \in \mathbb{Z}^+ \wedge C(i+k)\right)$ 其它相似的表达也可以，比如：$\forall n\Big((n \in \mathbb{N} \wedge n > 2) \rightarrow \exists k\Big((k \in \mathbb{N} \wedge k > 1) \wedge \forall i\big((i \in \mathbb{N} \wedge i < n) \rightarrow C(i+k)\big)\Big)\Big)$（6 分）

2）构造性证明，$(n+1)! + 2$，$(n+1)! + 3$，$\cdots$，$(n+1)! + (n+1)$，该序列满足要求，每个都是合数。（4 分）

得分	

三、（本题满分 12 分）

令ϕ为 2 次整系数多项式函数的集合，即$\phi = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$.

(1) 试分析ϕ是否为可数集合；

(2) 试分析$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists f \in \phi, f(x) = 0\}$是否为可数集合；

(3) 对于任意给定的$f \in \phi$，令$S_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x = f(x)\}$，$T_f = \{x \in \mathbb{R} | x = f(f(x))\}$，试证明：$S_f \subseteq T_f$.

【参考解答与评分标准】

1）函数集合Φ属于可数集合；具体证明参考可数集合笛卡尔积示例；（4 分）

2）解集属于可数集合；具体证明参考可数集合笛卡尔积示例；（4 分）

3）有定义可得，$\forall x_0 \in S_f \leftrightarrow x_0 = f(x_0)$；两边运用函数的复合运算，可得$f(x_0) = f(f(x_0)) = x_0$；所以可得$\forall x_0 \in S_f \rightarrow x_0 \in T_f$，所以可得$S_f \subseteq T_f$（4 分）

得分	

四、（本题满分 10 分）

令$\mathbb{Z}^+$为正整数集, 令$A=\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$，定义$A$上的二元关系$R$如下：

$$\big((a,b),(c,d)\big)\in R\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

证明：R为等价关系，并给出商集A/R.

【参考解答与评分标准】

1）等价关系证明略，只需要证明自反、对称、传递即可。（6 分）

2）商集答案略（4 分）

得分	

五、（本题满分 10 分）

某厂流水线采用基于 AI 大模型的检测系统实现自动化缺陷样品检测. 已知该厂样品的缺陷率为 0.1%. 在自动化检测过程中，如果某样品有缺陷，则该样品被成功检测为缺陷样品的概率为 99%；如果样品无缺陷，则该样品被检测为无缺陷样品（正常样品）的概率为 95%. 现在某个样品被 AI 系统检测为缺陷样品，请问该样品确实为缺陷样品的概率是多少？

【参考解答与评分标准】

定义事件A: 表示被检测样品有缺陷，B: 表示被检测样品被检测为缺陷样品；要求的是条件概率$p(A|B)$

$$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}=\frac{0.1\%\times 99\%}{0.1\%\times 99\%+5\%\times 99.9\%}\approx 0.66$$

（给出事件定义即可给 4 分，过程 6 分）

得分	

六、（本题满分 10 分）

若p为素数，q为合数，且p与q互素（最大公约数为 1），请判断$\sqrt{pq}$是有理数还是无理数，并给出结论的证明。

【参考解答与评分标准】

1）结论：$\sqrt{pq}$为无理数　（2 分）

2）反设$\sqrt{pq}$为有理数，则$\sqrt{pq}=\frac{m}{n}$, 且$(m,n)=1$。（2 分）我们有$n^2pq=m^2$，因为$(m,n)=1$，所以我们有$m|pq$。（2 分）但根据题意，p与q互质，所以$m=1$, 无法满足题意要求，因此假设不成立，$\sqrt{pq}$为无理数。（6 分）

得分	

七、（本题满分 12 分）

给定两个正整数n,k满足$k \le n$。给定一个n元有限集合A，令$P(A)$表示A的幂集.

(1) 令B为A的一个大小为k的子集（$0 \le k \le n$），证明$P(A)$恰好有$2^{2^{n-k}}-1$个非空子集S满足$B \subseteq \bigcap_{D\in S} D$；

(2) 证明$P(A)$恰好有$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(2^{2^{n-i}}-1)$ 个非空子集S满足$\bigcap_{D\in S} D=\emptyset$.

【参考解答与评分标准】

1） 若$B \subseteq \bigcap_{D\in S} D$，则任何集合$D \in S$均满足$B \subseteq D$ （1 分）

因此每个S的构造可以看成先选$P(A-B)$的一个非空子集S'，然后令每个集合$D' \in S'$都并上B。（3 分）

由于S'不能为空集，我们可以计算得到满足要求的S有$2^{|P(A-B)|}-1=2^{2^{n-k}}-1$个。（2 分）

2） 对A的任意元素a，构造集合T_a为$P(A)$的所有满足$\{a\} \subseteq \bigcap_{D\in S} D$的非空子集$S$。

我们需要计算$2^{2^n}-1-|\bigcup_a T_a|$。（2 分）

根据容斥原理，$|\bigcup_a T_a| = L_1 - L_2 + \cdots + (-1)^{n-1}L_n$。其中$L_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}|T_{i_1}\cap\cdots\cap T_{i_k}|$。（2 分）

由于$T_{i_1}\cap\cdots\cap T_{i_k}$为$P(A)$的所有满足$\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \bigcap_{D\in S} D$的非空子集$S$，根据第一问，我们有$|T_{i_1}\cap\cdots\cap T_{i_k}| = 2^{2^{n-k}}-1$。代入得证。（2 分）

得分	

八、（本题满分 12 分）

假设有 30 个小球，小球的颜色一共有 14 种（每个小球只有一种颜色）. 将这些小球平均放入 6 个箱子里，每个箱子刚好放入 5 个小球。令A_1,A_2,A_2,A_4,A_5,A_6分别为 6 个箱子里面小球的颜色的集合。证明以下两个条件不可能同时满足：

(1) 任意箱子内部的小球颜色两两不同，即 $|A_i| = 5\ (i=1,2,\cdots,6)$ ；

(2) 对任意两个不同的箱子，最多只有一种相同颜色的小球被同时放置到这两个箱子里，即

$|A_i \cap A_j| \le 1\ \ (1 \le i < j \le 6)$。

【参考解答与评分标准】

根据反证法假设存在一种小球放置方案使得两个条件(1)(2)均满足（1 分）

根据鸽笼原理，必然存在一种颜色有至少 3 个小球a_1,a_2,a_3，不妨假设它们的颜色为红色（3 分，证明中提及鸽笼原理即得 3 分）

根据条件(1)，这 3 个小球a_1,a_2,a_3必然被放置到 3 个不同的箱子，不妨假设这 3 个箱子编号为 1,2,3。（2 分）

根据条件(1)(2)，这 3 个箱子内部剩余的 12 个小球颜色必然两两不同，并且不为红色。因此，$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 13$。（2 分）
考虑 4 号箱子，根据条件(2)，$|A_4 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |(A_4 \cap A_1) \cup (A_4 \cap A_2) \cup (A_4 \cap A_3)| \leq |(A_4 \cap A_1)| + |(A_4 \cap A_2)| + |(A_4 \cap A_3)| \leq 3$。因此，4 号箱子最多用了前三号箱子的三种颜色。（2 分）
结合条件(1)，4 号箱子至少出现了 2 种颜色的小球，并且这 2 种颜色和前三号箱子的 13 种颜色均不相同。因此，小球颜色一共有至少 15 种，矛盾。（2 分）

得分	

九、（本题满分 12 分）

已知k为大于等于 2 的正整数，并且给定集合$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$.

(1) 若$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$均为有限集合，试给出使

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \approx P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_k)$$

成立的充分必要条件，并证明结论；

（注：$P(A)$表示集合A的幂集，$A \approx B$表示集合A与B等势.）

(2) 若$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$均为可数集合，且其中至少存在一个无限集合，请证明：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \approx P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_k).$$

【参考解答与评分标准】

1）充分必要条件为：$\forall i, j, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$；给出充分必要条件（2 分），证明可使用数学归纳法（4 分）；

2）不妨假设A_1为无限可数集合。

由条件得$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$为可数集合。由于k是有限的正整数，$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$为无限可数集合，与自然数集等势（2 分）

因此，$P(A_1)$与$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)$均与实数集等势。$P(A_2), \ldots, P(A_k)$的基数小于等于实数集的基数（3 分）

由于k是有限的正整数，$P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_k)$也与实数集等势，命题得证（1 分）