



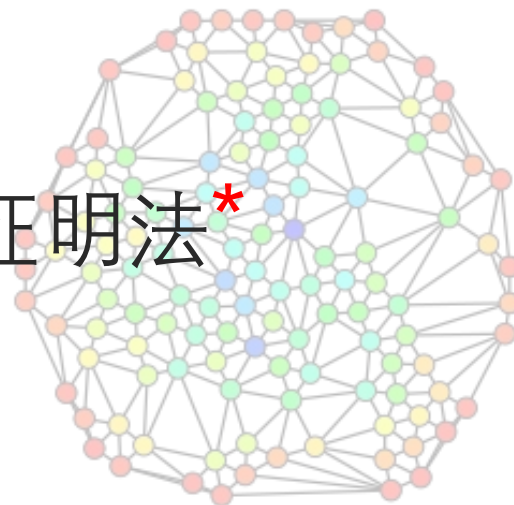
# 离散数学

## Discrete Mathematics

扩展阅读：扩大路径证明法\*

吴 楠

南京大学计算机学院



2025 年 5 月 23 日

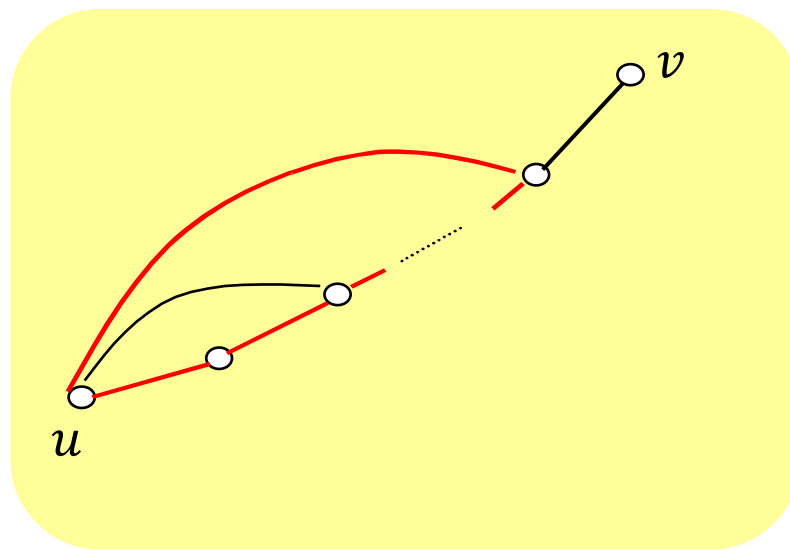


# 极大路径 (maximal path)



- **定义 (极大路径)** : 设 $P$ 是图中一条路径, 其端点为 $u, v$ ; 若 $u, v$ 均不与 $P$ 以外的任意顶点相邻, 则称 $P$ 是 $G$ 的一条**极大路径**

- **定义 (最大路径)** : 图的极大路径中最长的路径称**最大路径**





# 扩大路径证明法



## ■ 方法（扩大路径证明法）：

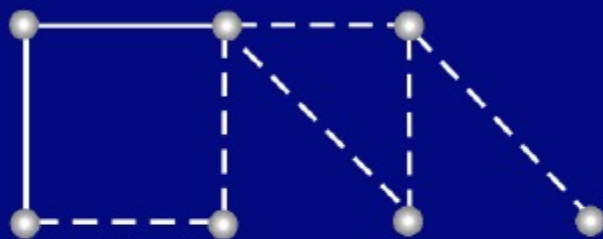
- 思想：只要 $G$ 中有边（i.e.  $\delta(G) > 0$ ），从任一条边开始，通过“扩大路径”方法一定可以构造极大路径（及最大路径）
- 构造：设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 $n$ 阶无向图， $E \neq \emptyset$ ，设 $\Gamma_l$ 为 $G$ 中一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两端点不与通路外的顶点相邻为止，设最后得到的路径为 $\Gamma_{l+k}$ （长度为 $l$ 的路径扩大成了长度为 $l+k$ 的路径），即 $G$ 的“极大路径”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径（证明）法”



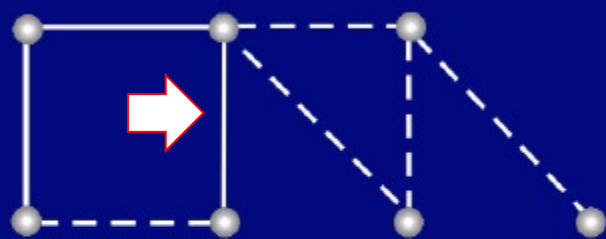
# 扩大路径证明法 (续)



- 由某条路径扩大出的极大路径不惟一
- 极大路径不一定是图中最长的路径

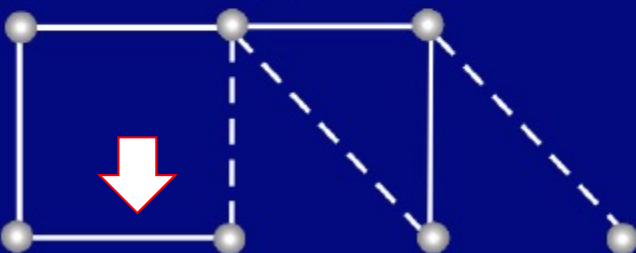


(1)



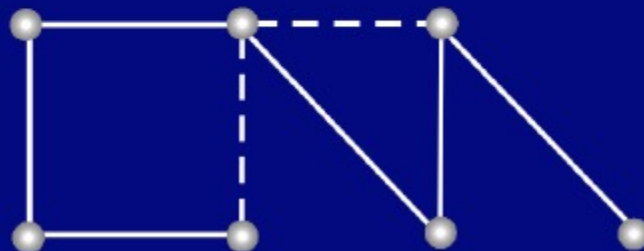
极大路径1

(2)



(3)

极大路径2



极大路径3 (最大路径)

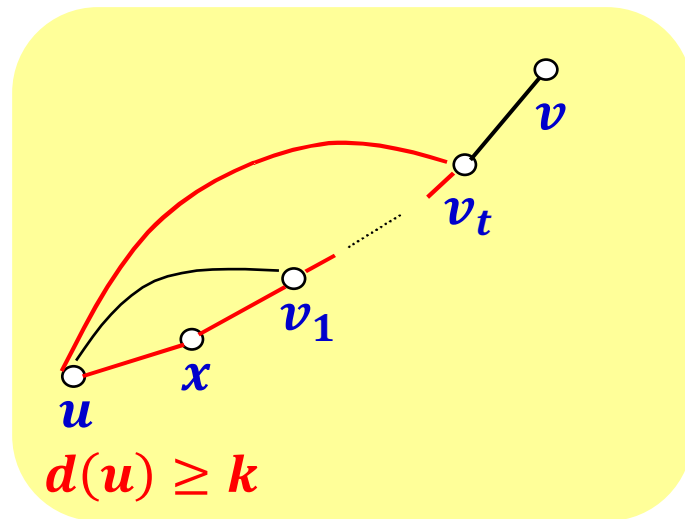
(4)



# 扩大路径证明法（续）



- **定理（最小顶点度与回路）**：  $G$  是简单图，若  $\delta(G) = k (k > 1)$  则  $G$  中必含长度至少为  $k + 1$  的初级回路
- **证明（扩大路径法）**： 因为图  $G$  最小顶点度数非零，一定可以通过扩大路径法找到一条极大路径  $(u, x, \dots, v)$ ，则  $u$  至少与该路径中  $k - 1$  个不同的顶点相邻，且这  $k - 1$  个顶点中不含  $x$ ，故此  $k - 1$  个顶点中沿该路径离  $u$  最远的一个下标一定不小于  $k - 1$ ，设其为  $v_t$ ，则  $(u, x, v_1, \dots, v_t, u)$  构成长度不小于  $k + 1$  的初级回路。 □





# 扩大路径证明法（续）



- **练习：** $G$ 是简单图且 $\delta(G) \geq 3$ ，证明图 $G$ 中一定存在偶圈（即长度为偶数的初级回路）
- **证明（扩大路径法）：**任取图 $G$ 中一路径，用扩大路径法扩展至最大路径（即扩展至找不到更长的路径为止） $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ ，由于 $d(v_0) \geq 3$ 故可取 $v_0$ 的两个相邻顶点；若此二顶点不在 $P$ 上，则可以取得更长的路径，所以两个顶点都应在 $P$ 上。不妨设此二点不同，为 $v_i, v_j$ ，且 $i < j$ ；由于 $v_i, v_j$ 皆与 $v_0$ 相邻且与 $v_1$ 不同，故 $1 < i < j$ 。若 $i, j$ 中有一个为奇数，如 $i$ ，则 $P$ 上 $v_0$ 到 $v_i$ 与边 $v_0v_i$ 构成偶圈（其长度为 $i+1$ ）；如若 $i, j$ 皆为偶数，则 $P$ 上 $v_i v_j$ 段与 $v_0v_i$ 和 $v_0v_j$ 构成一个偶圈（其长度为 $j-i+2$ ）。故 $G$ 中一定存在偶圈。□

