

第七次习题课

赖司贤

主要问题

- 过程缺失
- 逻辑不通
- 题目理解错误

Problem 1

- a) 证明：任意给出四个整数，则其中至少有两个整数，它们除以 3 的余数相同（即模 3 同余）。
- b) 证明：若 a_1, a_2, \dots, a_{p+1} 是整数，则其中至少有两个数模 p 同余。

简单：鸽笼

Problem 2

某班有学生 60 人，其中有 38 人学习 PASCAL 语言，有 16 人学习 C 语言，有 21 人学习 COBOL 语言；有 3 个人这三种语言都学习，有 2 个人这三种语言都不学习，问仅学习两门语言的学生数是多少？

- 简单：venn图/容斥

Problem 3

1. a) 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ 的非负整数解的个数有多少?

2. b) 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ 的正整数解的个数有多少?

- 一般: 转化为组合中情境然乎进行组合计数 / 递归

Problem 4

一个圆盘分成 36 个连续扇区，其编号为 $1, 2, 3, \dots, 36$.

a) 证明有 4 个连续扇区，其编号之和大于 74.

b) 证明有 5 个连续扇区，其编号之和大于 94.

- 一般： 鸽笼以及一些简单讨论

Problem 5

长度为 n ($n > 5$) 且以 123 开始或以 321 结尾的三进制串有多少个?

- 简单：直接计数

Problem 6

长度为 12 且不包含 “11” 子串的二进制串有多少个？

- 一般：分情况进行组合计数/ 递归得到结果为Fibonacci数列

Problem 7

有 6 个集合, 如果知道其中任 3 个集合都是不相交的, 根据容斥原理写出关于这 6 个集合并集元素个数的显式公式.

- 简单: 定义

Problem 8

设 p 和 q 都是素数, $n = p * q$. 使用容斥原理计算不超过 n 并与 n 互素的正整数的个数.

- 简单

Problem 9

在这个问题里，我们将要计数 xy 平面上在 origin 和 (m, n) 点之间的路径数. 这些路径由一系列的步构成，其中每一步是向右或者向上移动一个单位（不允许向左或向下移动）.

- a) 证明上述每条这种类型的路径可以用由 m 个 0 和 n 个 1 组成的比特串表示.
- b) 所求路径共有多少条.

- 简单： 组合

Problem 10

考虑一个 $N \times N$ 网格, 其中的每一个单元格可以取值 $+1$ 或 -1 . 我们称这种网格为二进制网格 (*Binary grid*). 任何行的行乘积 (*row product*) 都被定义为该单行中所有元素的乘积. 同样, 一列的列乘积 (*column product*) 被定义为该单个列中所有元素的乘积. 如果 N 行的行乘积中, 有且只有一个结果为 -1 , 而 N 列的列乘积中, 有且只有一个结果为 -1 , 则该 $N \times N$ 的二元网格称为魔术网格. 换句话说, 魔术网格要求其他 $N - 1$ 个行乘积全部为 $+1$, 其他 $N - 1$ 个列乘积应也全部为 $+1$. 试计算所有 $N \times N$ 的网格中, 魔术网格的数量.

困难: 需要有以下观察之一:

- 确定行列乘积以及 $(N-1) \times (N-1)$ 子矩阵后剩余元素唯一确定
- 每个行列乘积对应的矩阵数目相同

Problem 11

设 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 是 $x - y$ 平面上具有整数坐标的五个不同的点，证明：至少存在一对点的连线中点的坐标是整数.

- 简单： 鸽笼

Problem 12

【探索问题】利用 DeepSeek 等大语言模型平台启发思路，并写出解答以下问题的完整过程（建议使用 DeepSeek-R1-671B-BF16 专项引擎，可使用[南京大学校内 DeepSeek 服务](#)）：

对定义在 m 元集合 A 和 n 元集合 B 上的满射函数 $f: A \rightarrow B$ 进行计数.

- 自主探索：容斥/二项式反演/斯特林数

自定义谓词，用谓词逻辑语句表示下列各前提和结论的陈述，并证明结论成立。

前提：

- 1) 2024 年春，所有大一计算机系的同学均参加了春游：玄武湖骑行。
- 2) 所有参加玄武湖骑行的同学要么自备了骑行车辆，要么租用了园区骑行车辆。
- 3) 所有租用园区骑行车辆的同学均需要交纳租用押金或者签署租用协议书。
- 4) 王小花同学是大一计算机系同学，并且王小花同学没有自备骑行车辆。
- 5) 王小花同学没有交纳租用押金。

结论：

王小花同学签署了租用协议书。

【参考解答与评分标准】

(定义各谓词：4 分) $A(x)$: x 为大一计算机系同学； $B(x)$: x 参加玄武湖骑行； $C(x)$: x 自备骑行车辆； $D(x)$: x 租用园区骑行车辆； $E(x)$: x 交纳了租用押金； $F(x)$: x 签署了租用协议书；选择个体 k ：王小花
各语句翻译如下：(翻译：4 分)

前提：1) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ ；2) $\forall x(B(x) \rightarrow C(x) \vee D(x))$ ；3) $\forall x(D(x) \rightarrow E(x) \vee F(x))$ ；4) $A(k) \wedge \neg C(k)$ ；5) $\neg E(k)$ ；结论： $F(k)$

推理过程如下 (推理过程：4 分，可以不写后面的说明)

- | | | | |
|-------------------------------------|----------------|--------------------|---------------|
| ① $A(k) \rightarrow B(k)$ | 全称例示 from 1) | | |
| ② $B(k) \rightarrow C(k) \vee D(k)$ | 全称例示 from 2) | | |
| ③ $A(k) \rightarrow C(k) \vee D(k)$ | 假言三段论 from ①、② | | |
| ④ $A(k)$ | 化简 from 4) | ⑨ $E(k) \vee F(k)$ | 假言推理 from ⑦、⑧ |
| ⑤ $C(k) \vee D(k)$ | 假言推理 from ③、④ | ⑩ $\neg E(k)$ | Premise 5) |
| ⑥ $\neg C(k)$ | 化简 from 4) | | |
| ⑦ $D(k)$ | 取拒式 from ⑤、⑥ | ⑪ $F(k)$ | 取拒式 from ⑨、⑩ |
| ⑧ $D(k) \rightarrow E(k) \vee F(k)$ | 全称例示 from 3) | | |

仅用命题逻辑证明本题最多给 4 分。

得分 二、(本题满分 10 分)

请将下列命题翻译成谓词逻辑语句，并证明命题成立：

对于任意大于 2 的正整数 n ，均存在连续的 n 个正整数，它们均为合数。

• 简单

得分	
----	--

三、(本题满分 12 分)

令 ϕ 为 2 次整系数多项式函数的集合, 即 $\phi = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$.

- (1) 试分析 ϕ 是否为可数集合;
- (2) 试分析 $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists f \in \phi, f(x) = 0\}$ 是否为可数集合;
- (3) 对于任意给定的 $f \in \phi$, 令 $S_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x = f(x)\}$, $T_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x = f(f(x))\}$, 试证明: $S_f \subseteq T_f$.

• 简单

得分

四、(本题满分 10 分)

令 \mathbb{Z}^+ 为正整数集, 令 $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, 定义 A 上的二元关系 R 如下:

$$((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

证明: R 为等价关系, 并给出商集 A/R .

- 简单: 直接写出商集或证明商集与正有理数同构

得分	
----	--

五、(本题满分 10 分)

某厂流水线采用基于 AI 大模型的检测系统实现自动化缺陷样品检测. 已知该厂样品的缺陷率为 0.1%. 在自动化检测过程中, 如果某样品有缺陷, 则该样品被成功检测为缺陷样品的概率为 99%; 如果样品无缺陷, 则该样品被检测为无缺陷样品 (正常样品) 的概率为 95%. 现在某个样品被 AI 系统检测为缺陷样品, 请问该样品确实为缺陷样品的概率是多少?

- 简单: bayes后验概率 (给出事件定义即可给4 分, 过程6 分)

得分

六、(本题满分 10 分)

若 p 为素数， q 为合数，且 p 与 q 互素（最大公约数为 1），请判断 \sqrt{pq} 是有理数还是无理数，并给出结论的证明。

- 简单：重复无理数的经典证明

得分	
----	--

七、(本题满分 12 分)

给定两个正整数 n, k 满足 $k \leq n$ 。给定一个 n 元有限集合 A ，令 $P(A)$ 表示 A 的幂集。

(1) 令 B 为 A 的一个大小为 k 的子集 ($0 \leq k \leq n$)，证明 $P(A)$ 恰好有 $2^{2^{n-k}} - 1$ 个非空子集 S 满足 $B \subseteq \bigcap_{D \in S} D$ ；

(2) 证明 $P(A)$ 恰好有 $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (2^{2^{n-i}} - 1)$ 个非空子集 S 满足 $\bigcap_{D \in S} D = \emptyset$ 。

• 一般：1构造双射，2容斥

得分

八、(本题满分 12 分)

假设有 30 个小球，小球的颜色一共有 14 种（每个小球只有一种颜色）。将这些小球平均放入 6 个箱子里，每个箱子刚好放入 5 个小球。令 $A_1, A_2, A_2, A_4, A_5, A_6$ 分别为 6 个箱子里面小球的颜色的集合。证明以下两个条件不可能同时满足：

- (1) 任意箱子内部的小球颜色两两不同，即 $|A_i| = 5 \ (i = 1, 2, \dots, 6)$ ；
- (2) 对任意两个不同的箱子，最多只有一种相同颜色的小球被同时放置到这两个箱子里，即 $|A_i \cap A_j| \leq 1 \ (1 \leq i < j \leq 6)$ 。

- 简单：容斥
- 一般：分类讨论

得分	
----	--

九、(本题满分 12 分)

已知 k 为大于等于 2 的正整数, 并且给定集合 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$.

(1) 若 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ 均为有限集合, 试给出使

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \approx P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_k)$$

成立的充分必要条件, 并证明结论;

(注: $P(A)$ 表示集合 A 的幂集, $A \approx B$ 表示集合 A 与 B 等势.)

(2) 若 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ 均为可数集合, 且其中至少存在一个无限集合, 请证明:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \approx P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_k).$$

简单: 定义

一般: 严格证明 (构造出等势所要求的双射)