



离散数学

Discrete Mathematics

自学内容：有限集合的计数

吴楠

南京大学计算机科学与技术系

2025 年 3 月 28 日



前情提要



- 数学归纳法
- 强数学归纳法
- 递归的定义
- 函数的递归结构与结构归纳法

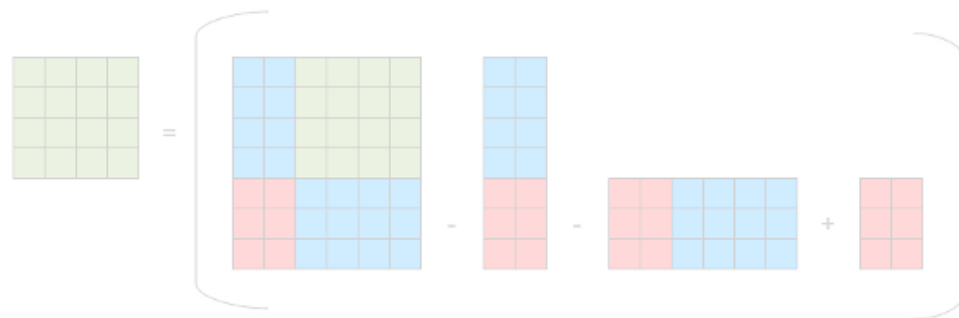




自学内容提要

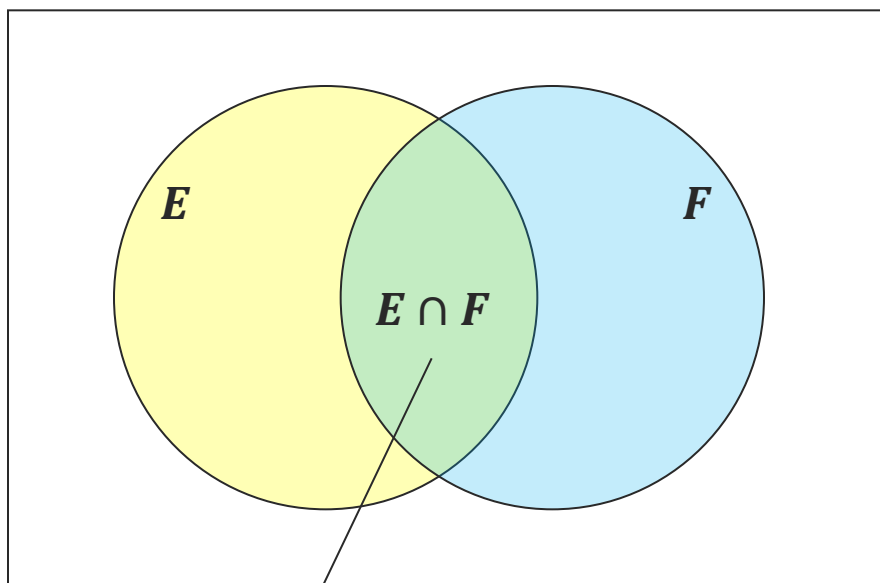


- 用于分类的有限集合
- 有限集合的计数
- 容斥原理 (PIE)
- 容斥原理的应用





用于分类的有限集合



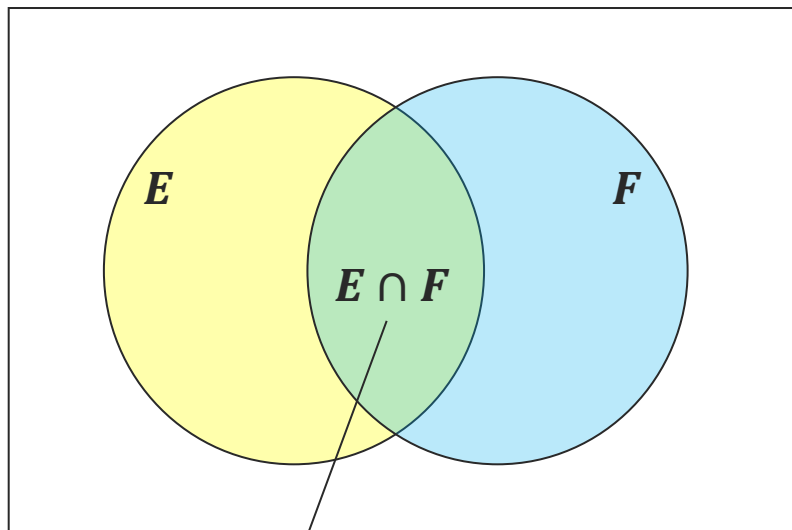
“既学英语又学法语的同学”

将属于某个集合的元素理解为“具有某种性质”的对象，则属于该集合的**补集**的元素则是“不具有某种性质”的对象

将全班同学的集合视为全集。其子集E是学英语的同学们的集合，或理解为满足性质E的对象的集合。类似地，F是学法语的同学们的集合，即满足性质F的对象的集合



有限集合的计数



“既学英语又学法语的同学”

假设全班共100人，记为 $|U| = 100$
学英语的50人，学法语的30人，分
别记为： $|E| = 50$ ， $|F| = 30$ ；那
么，既不学英语，也不学法语的人
数是多少？

显然，只要 $E \cap F \neq \emptyset$ ，既不学英
语，也不学法语的人数并非 20 人：

$$\begin{aligned} |\sim(E \cup F)| &= |U| - |E \cup F| \\ &= |U| - \left[(|E| + |F|) - |E \cap F| \right] \end{aligned}$$



应用举例：排列的计数



- 将0,1,2,...,9排成一列，要求第1个数字大于1，最后一个数字小于8，共有多少种排法？
 - 这10个数字所有的排法构成全集 U ， $|U| = 10!$
 - 第1个数字不大于1的排法构成子集 A (即所有以0或者1开头的排法)： $|A| = 2 \cdot 9!$
 - 最后一个数字不小于8的排法构成子集 B (即所有以8或者9结束的排法)： $|B| = 2 \cdot 9!$
 - $|A \cap B| = 2 \cdot 2 \cdot 8!$
 - 问题要求的排法构成子集 $\bar{A} \cap \bar{B}$
 - $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A \cup B| = |U| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 10! - 4 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2338560$



三集合的计数



- 假设定义全集的三个子集 A, B, C 分别满足性质 A, B, C , 则:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- 证明:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



容斥原理



- **容斥原理** (Principle of Inclusion and Exclusion, **PIE**) 的一般表述为：假设有**无穷**全集含 N 个元素， A_1, A_2, \dots, A_n 是分别满足相应性质的元素构成的子集。则**不满足任何性质的集合**的元素个数是：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$$

$$= N - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^k S_k + \dots + (-1)^n S_n$$

其中， $S_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|, k = 1, 2, \dots, n$



容斥原理 (续)



- 例如：包含4个子集的容斥原理的公式为：

$$\begin{aligned} N - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + \\ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) - \\ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) + \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

- **推论：**全集中至少具有一条性质的元素数为：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = N - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}|$$

由De Morgan律易证



容斥原理的证明



- 公式: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n$
- 我们证明, 在上述公式中:
 - (1) 不满足所有性质 A_i 的元素恰好被计数1次
 - (2) 满足1个或多个性质的元素恰好被计数0次
- 假设 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = 10$, 那表示:
 - 有且仅有10个不属于任意 A_i 的元素, 每个元素被计数1次
 - 属于1个或者多个 A_i 的元素, 没有被计数 (计数总数为0)



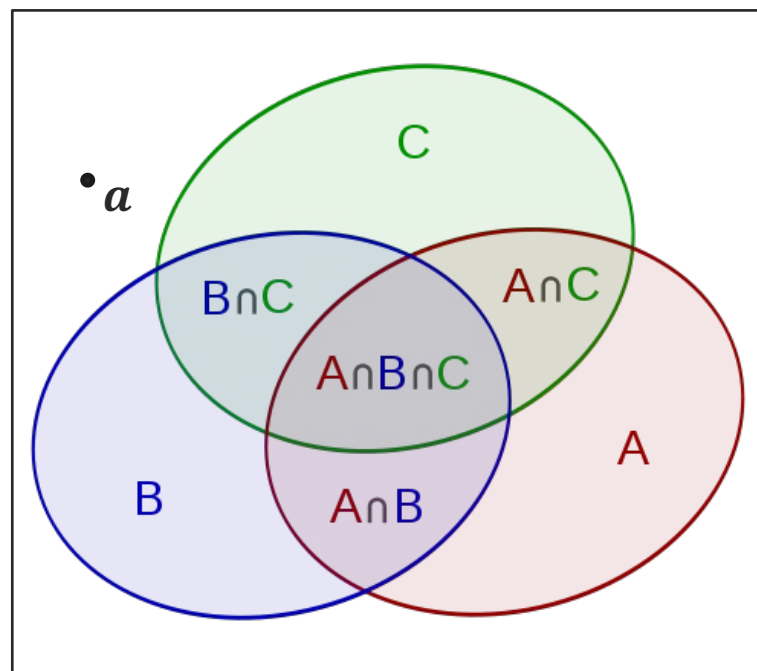
容斥原理的证明 (续)



■ 公式: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n$

■ 第一步: 不满足所有性质 A_i 的元素恰好被计数1次

- 任取其中一个元素 a
- 该元素在 N 中被计数一次
- a 不属于任意的 S_i
- 该元素不会在任意的 S_i 中被计数





容斥原理的证明 (续)



- 公式: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n$
- 第二步: 满足1个或多个性质的元素恰好被计数0次
 - 设元素 a 满足 m 个性质
 - 则它在 N 中被计数1次, 在 S_1 中被计数 $C_m^1 = m$ 次, 在 S_2 中被计数 C_m^2 次, 在 S_3 中被计数 C_m^3 次, \cdots , 在 S_k 中被计数 C_m^k 次
 - 将上述结果代入计数公式右边: $1 - C_m^1 + C_m^2 - \cdots + (-1)^k C_m^k + \cdots + (-1)^m C_m^m$
 - 考虑二项展开式 $(1 - x)^m = 1 - C_m^1 x + C_m^2 x^2 - \cdots + (-1)^k C_m^k x^k + \cdots + (-1)^m C_m^m x^m$, 令 $x = 1$, 上式= 0



埃拉托色尼筛



- 用Eratosthenes筛法求质数 (25以内)

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[2] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[3] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[5] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25



质数的计数



- 100 以内的任意合数必有不大于其平方根的质数为其因子。这样的质数只有4个：{2, 3, 5, 7}
- 设 A_2, A_3, A_5, A_7 分别是可被相应质数整除的100以内大于1的自然数的集合。则100以内质数的数量为：

$$\begin{aligned} N(\overline{A_2 A_3 A_5 A_7}) &= 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor \\ &+ \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \right\rfloor \\ &- \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + 4 \\ &= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 + 4 \\ &= 25 \end{aligned}$$



错位排列问题



- 剧场的衣帽管理间新来了一个粗心的管理员，他忘了给每个客人的帽子夹上号码牌，散场时他只好随意地将帽子发还给客人，求没有任何人拿到自己的帽子的概率
- 这可以看作一个排列问题：对标号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 n 个帽子重新排列，新的序号为 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ 。上述问题的模型即为：求满足对任意 $k(1 \leq k \leq n)$, $i_k \neq k$ 的排列出现的概率
- 这样的排列称为“**错位排列** (derangement)”
- 适当的集合模型可使问题得到简化



错位排列问题 (续)



- 我们将 $i_k = k$ 称为“性质 A_k ”。满足性质 A_k 的排列构成所有排列的一个子集 A_k ，则：

- 错位排列的个数为： $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n$

其中， $N = n!$ ， S_k 如前所定义，即：

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|, k = 1, 2, \cdots, n$$

- 注意：保持 k 项不变的置换即其余 $n - k$ 项可任意排列，故

$$S_1 = C_n^1(n-1)!, S_2 = C_n^2(n-2)!, \cdots, S_k = C_n^k(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$



错位排列问题 (续)



已经知道错位排列的个数为 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n$; 其中, $N = n!$ 。将诸

$$S_k = C_n^k (n-k)! = \frac{n!}{k!} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

代入上式, 可得:

i.e. 子阶乘: $!n$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}, \text{ 故错位}$$

$$\text{排列数占整个全排列的比例为 } \frac{|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

注意 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \approx 0.367879$, 故当 n 较大时, 所求概率约为 36.8% 且与 n 无关



本次课后作业



■ 教材内容：[Rosen] 6.1.4 节、8.5 节、8.6 节

■ 课后习题：

○ 本讲作业暂不布置，待自学完成和第12讲内容

完成后一并布置课后作业

