

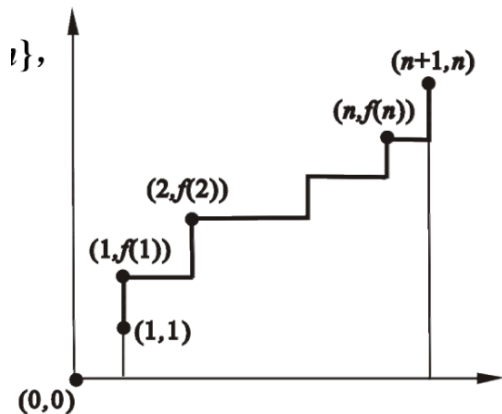
第 12 讲两个思考问题^{*}的解释

(思考题 1)^{*} 程序片段箭头语句的执行次数。

```
k := 0
for i1 := 1 to n
  for i2 := 1 to i1
    .
    .
    .
  for im := 1 to im-1
    ➡ k := k + 1
```

上述程序片段包括一个层数为 m 的嵌套循环，对于给定的 $i_1, i_2, \dots, i_m (1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq \dots \leq i_1 \leq n)$ ，循环体每执行一次，箭头语句就执行一，所以循环结束之后箭头语句执行次数的计数就是循环体执行的次数计数。这个计数对应了整数序列 i_1, i_2, \dots, i_m 所有可能的取值个数，即多重集 $S = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \dots, \infty \cdot n\}$ 的 m -组合数。一旦从多重集 S 中选定了 m 个整数，按照由大到小的顺序（包括两数相等），就唯一确定了一组 i_1, i_2, \dots, i_m 的取值。由多重集的组合计数公式， $k = \binom{n+m-1}{m}$ 。

(思考题 2)^{*} 求集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的单调递增函数的个数。



这里没有从 $(0,0)$ 开始计数和增加 $(1,1)$ 、 $(n+1,n)$ 两个点的原因是前者不在定义域内，不能取，后者为了方便给出不带有函数 $(f(n))$ 的计数公式。为何加后者二点？一个简单的理解可以通过坐标系变换来考虑，坐标轴的平移变换是不影响非降折线计数的，可以将坐标轴原点向右上方平移各一个单位，即 $(1,1) \rightarrow (0,0)$ 这样就是从 $(0,0)$ 到 $(n, n-1)$ 的非降折线计数了，由 Slides 上页的公式，这个计数就是 $\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$ 。同页下面那个结论是所有单调函数（包括非严格的单增和单减函数）的计数，因此要乘以 2。