



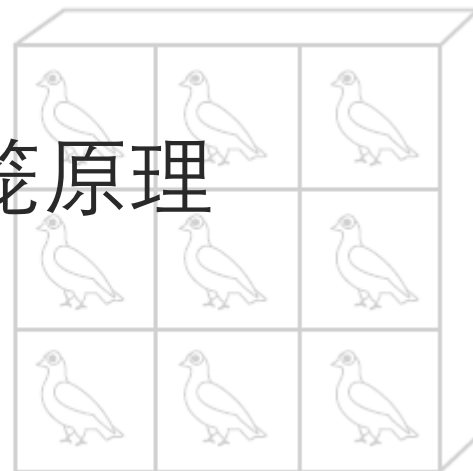
离散数学

Discrete Mathematics

第十二讲：排列组合与鸽笼原理

吴楠

南京大学计算机科学与技术系



2025 年 4 月 1 日



前情提要（自学内容）



- 用于分类的有限集合
- 有限集合的计数
- 容斥原理 (PIE)
- 容斥原理的应用





本讲主要内容



- 乘法原则与加法原则
- r -排列及其应用
- r -组合及其应用
- 环排列的计数
- 不可区分的排列与有重复的组合
- 鸽笼原理及其应用 (自学内容)





乘法原则 (multiplication principle)



- 一事件，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法…做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成该事件总的不同的方法数为：

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

步骤 1

步骤 2



乘法原则 (续)



- 例1: 设 A 为 n 元集, $|\mathcal{P}(A)| = ?$
- 例2: 对于标准围棋棋盘, 最大可能格局数?
- 例3: 设 A 为 n 元集, A 上的自反关系有几个?
- 例4: 设 A 为 n 元集, A 上的函数有多少个? 双射函数有多少个?
- 例5: 箭头所指语句的执行次数?

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
  for i2 := 1 to n2
    .
    .
    .
  for im := 1 to nm
    → k := k + 1
```



加法原则 (addition principle)



- 一事件，完成它可以有 n 种途径，在第一类途径中有 m_1 种不同的方法，在第二类途径中有 m_2 种不同的方法…在第 n 类途径中有 m_n 种不同的方法，那么完成该事件共有：

途径 1

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同方法，每一种方法都能够直接达成目标

途径 3



加法原则 (续)



■ 例1: IPv4地址总数有多少?

Network Bits Hosts Bits Bits Determining Class

Class	1st Byte	2nd Byte	3rd Byte	4th Byte
Class A	00000000	00000000	00000000	00000000
Class B	10000000	00000000	00000000	00000000
Class C	11000000	00000000	00000000	00000000

■ 例2: 右边代码执行之后 k 值为多少?

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
    k := k + 1
for i2 := 1 to n2
    k := k + 1
    .
    .
    .
for im := 1 to nm
    k := k + 1
```



计数问题与排列组合



- 大多数计数问题均可转化为寻找特定集合中不同元素的排列或组合的方法数的问题，排列和组合都是对集合的目标元素进行的限制
 - 排列 (permutation) : 对集合中某些元素的有序性限制
 - 组合 (combination) : 对集合中某些元素的选择性限制



r -排列计数



- 定义 (r -排列) : 对 n 元集合中 r 个元素的有序安排 (次序不同认为是不同的安排) 称为 r -排列
- 例: 包含A、B、C中任意2个不同字母的串即为3元集中的2 -排列, 共有6种
- r -排列的计数 (排列数, $n \geq r$) :

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$



r -排列计数的应用



- 例1: 某密码为以英文字母（包括大小写）开头的8位字母和数字串且各位不同，则可能的密码共有多少种？
 - 第1位固定为字母，为52种可能，后7位为51 + 10个字符中的7-排列，计数： $52 \times P(61, 7) = 114337846022400$
- 例2: 字母串“ $ABCDEF$ ”中有多少种排列包含子串“ BCD ”？
 - 将子串“ BCD ”看做一个整体“ X ”，则“ $AXEF$ ”的4-排列（*i.e.* 全排列）数即为所求： $P(4, 4) = 4! = 24$





r -组合计数



- 定义 (r -组合) : 对 n 元集合中 r 个元素的无序组合 (相同元素不同次序的出现认为是相同的组合) 称为 r -组合
- 例: 包含A、B、C中任意2个字母的出现方式即为3元集中的2-组合, 共有3种
- r -组合的计数 (组合数, $n \geq r$) :

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$





组合恒等式



■ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ ($n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$, 下同)

■ $\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1}$

■ $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$





组合恒等式 (级数形式*)



- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (n, k \in \mathbb{N}, \text{下同})$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
- $\sum_{l=k}^n \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (l \in \mathbb{N})$
- $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r} \quad (n, r, k \in \mathbb{N}, r \leq \min(m, n))$
- $\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{m} \quad (m, n \in \mathbb{N})$
- $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} \quad (n \geq r \geq k, n, r, k \in \mathbb{N})$



r -组合计数的应用



■ 例1: 设 A 为 n 元集, $|\mathcal{P}(A)| = ?$

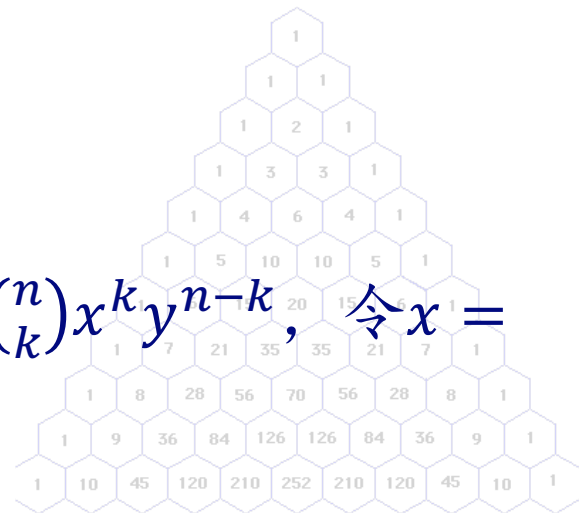
○ A 的各子集中的元素个数从0 (对应 \emptyset) 到 n (对应 A) ,

故所有子集计数为 $C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \cdots +$

$$C(n, n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

○ 根据二项式定理: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, 令 $x =$

$y = 1$ 即得所求: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$



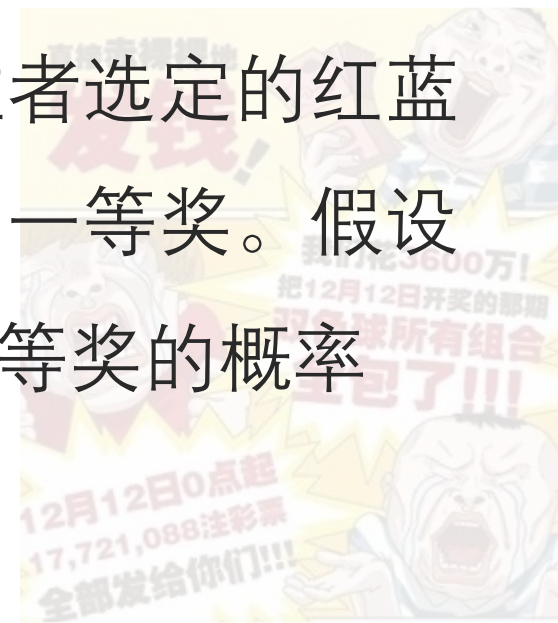


r - 组合计数的应用 (续)



- **例2:** 中国福利彩票“双色球”的投注规则为：
每注投注号码由6个红色球号码和1个蓝色球号码组成。红色球号码从1—33中无序选择6个；蓝色球号码从1—16中选择1个。若投注者选定的红蓝色球号码均与开奖号码一致，则中一等奖。假设开奖过程完全随机，求投单注中一等奖的概率

- $$P = 1 / \binom{33}{6} \binom{16}{1} = \frac{1}{17721088}$$

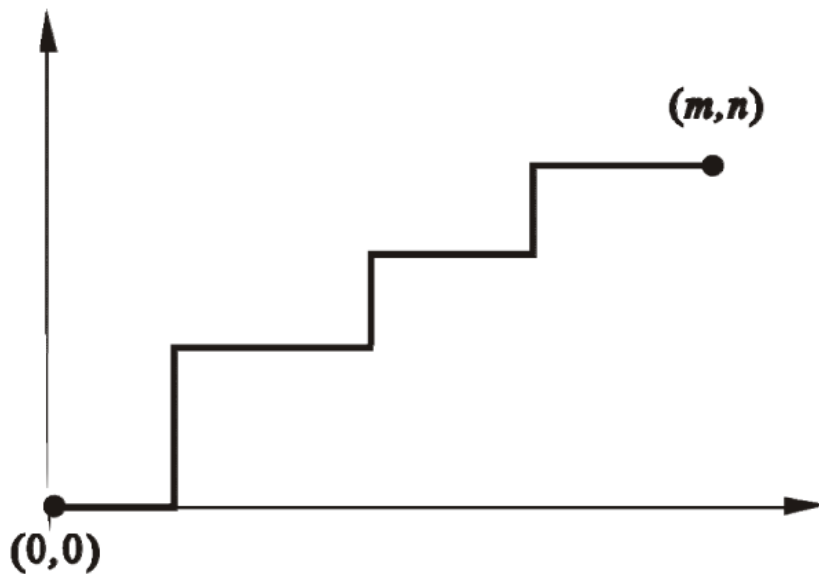




r -组合计数的应用 (续)



- 例3：下图中设 m, n 为正整数，从点 $(0,0)$ 到点 (m,n) 的非降路径指每次均向上或向右移动一步构成的折线，则不同的非降路径有多少条？





r -组合计数的应用 (续)

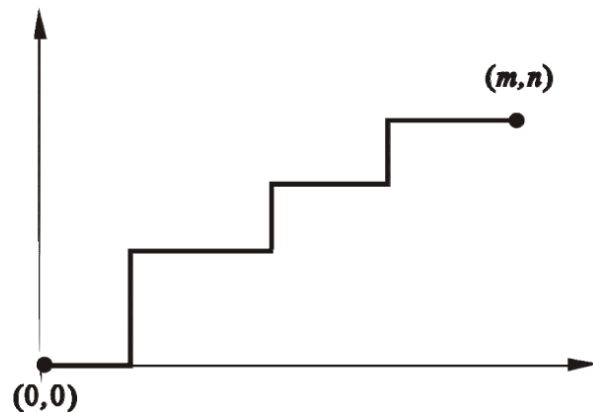


■ 例3：下图中设 m, n 为正整数，从点 $(0,0)$ 到点 (m,n) 的**非降路径**指每次均**向上**或**向右**移动一步构成的折线，则不同的非降路径有多少条？

○ 显然每条非降路径的总步数为 $m+n$ ，不同的非降路径取决于这 $m+n$ 步的选择；

○ 故此路径总条数即为从 $m+n$ 个位置中选出 m 个（或 n 个）位置的方法数，

即 $\binom{m+n}{m}$ 或 $\binom{m+n}{n}$

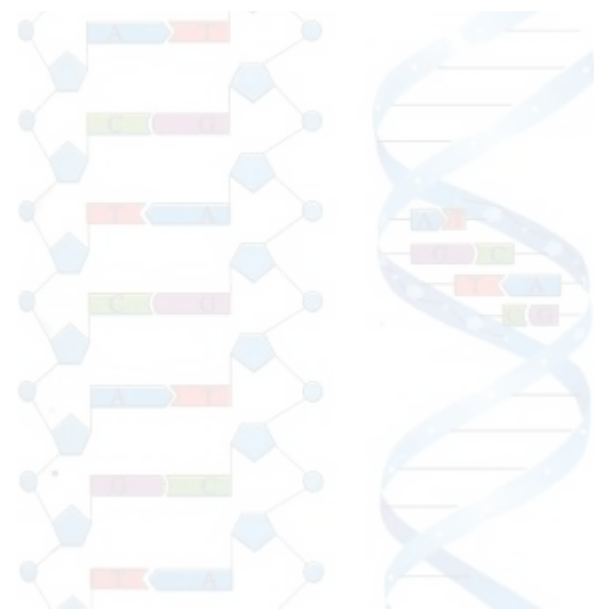




r -组合计数的应用 (续)



- 例4^{*} : 求集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的单调递增函数的个数



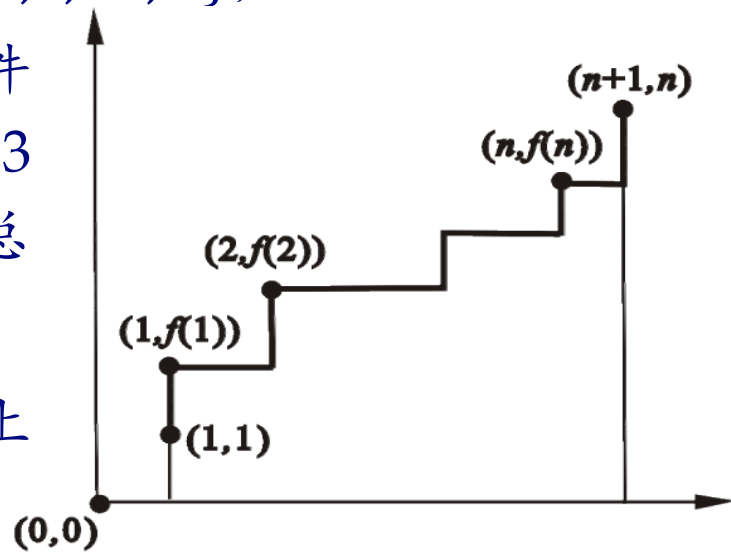


r -组合计数的应用 (续)



■ 例4*：计数集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的单增函数 (思考题)

- 首先连接点 $(1, 1)$ 与点 $(1, f(1))$ ，然后依照“先向右，后向上”的原则构造非降路径（对应非严格的单增函数），直到点 $(n+1, n)$ ，易见每条如此构造的非降路径皆对应于一个非严格的单调递增函数 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ；
- 因此原问题被简化为带有约束条件的“非降路径”计数问题，根据例3的结论，该约束条件下非降路径总数为 $\binom{2n-1}{n}$ ，此计数即为问题所求；推广之，从 $\{1, 2, \dots, m\}$ 到 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的所有单调函数的计数为 $2\binom{m+n-1}{m}$





环排列计数问题



- 定义（环排列）：对 n 元集合中 r 个非重复元素依次排成一个圆圈，此类有序安排（次序不同认为是不同的安排）称为环排列
- 设普通排列（线排列）的 r 个元素依次为 a_1, a_2, \dots, a_r ，将 a_1 与 a_r 相连，就成了一个环排列。显然只要相邻关系不变，此 r 个元素任意一个作为线排列的首元素对应的环排列均不变，因此环排列数为线排列数的 $1/r$
- 环排列的计数（环排列数， $n \geq r$ ）： $P(n, r)/r$



不可区分元素的排列计数



- **定理**（不可区分元素的排列计数）：设 n 个元素分类如下：类型1的元素有 n_1 个，类型2的元素有 n_2 个， \dots ，类型 k 的元素有 n_k 个；具有相同类型的元素不可区分，则此 n 个元素的不同排列数为：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$



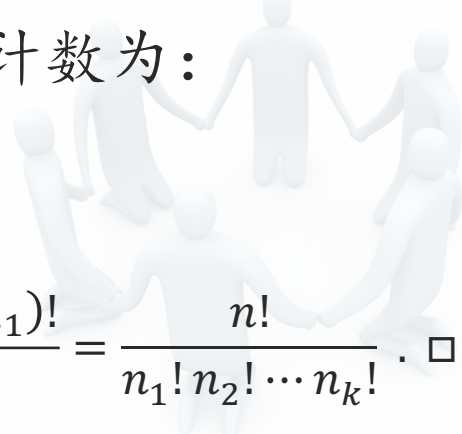


不可区分元素的排列计数 (续)



- **证明**：在 n 个位置中先选择 n_1 个位置放第1类元素，故有 $\binom{n}{n_1}$ 种方法；再从剩下的 $n - n_1$ 个位置中选择 n_2 个位置放第2类元素，有 $\binom{n - n_1}{n_2}$ 种方法；直到最后在 $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}$ 个位置中选择 n_k 个位置放第 k 类元素，有 $\binom{n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}}{n_k}$ 种方法，根据乘法原则，总的排列方法的计数为：

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \cdots \binom{n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_1! (n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2! (n - n_1 - n_2)!} \cdots \frac{(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1})!}{n_k! 0!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \cdot \square \end{aligned}$$

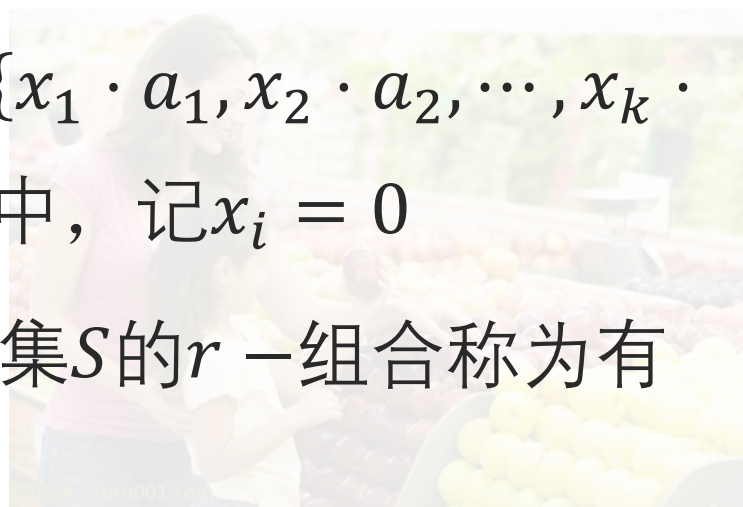




有重复的组合计数问题



- **定义（多重集）**：允许出现重复元素的集合称为多重集，多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 中 a_1, a_2, \dots, a_k 是 k 种不同元素， n_i 表示 a_i 在 S 中出现的次数，称为 a_i 的重复度，如 a_i 足够多则记 $n_i = \infty$ ； S 的子集也为多重集，记 $A = \{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \dots, x_k \cdot a_k\}$ ，若元素 a_i 未出现在子集 A 中，记 $x_i = 0$
- **定义（有重复的组合）**：多重集 S 的 r -组合称为有重复的组合





有重复的组合计数问题 (续)



- 有重复的组合的计数：当 $r \leq n_i, i = 1, 2, \dots, k$ 时，

多重集 S 的 r -组合数为： $\boxed{\binom{k+r-1}{r}}$

- 证明*： S 的一个有重复的 r -组合对应 S 的一个子集：

$\{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \dots, x_k \cdot a_k\}$ ，其中 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ ， x_i 为非负整数， $i = 1, 2, \dots, k$ ；此为一个不定方程，可在其非负整数解 (x_1, x_2, \dots, x_k) 与 r 个 1、 $k-1$ 个 0 的排列之间建立一一对应：即对于解 (x_1, x_2, \dots, x_k) ，可

重复排列具有形式： $\underbrace{11\dots1}_{x_1} \underbrace{011\dots1}_{x_2} \dots \underbrace{011\dots1}_{x_k}$ ，其中 $k-1$ 个 0 将 r 个 1

分为 k 段，每段含有 1 的个数分别为 x_1, x_2, \dots, x_k ，易见此为多重集 $S =$

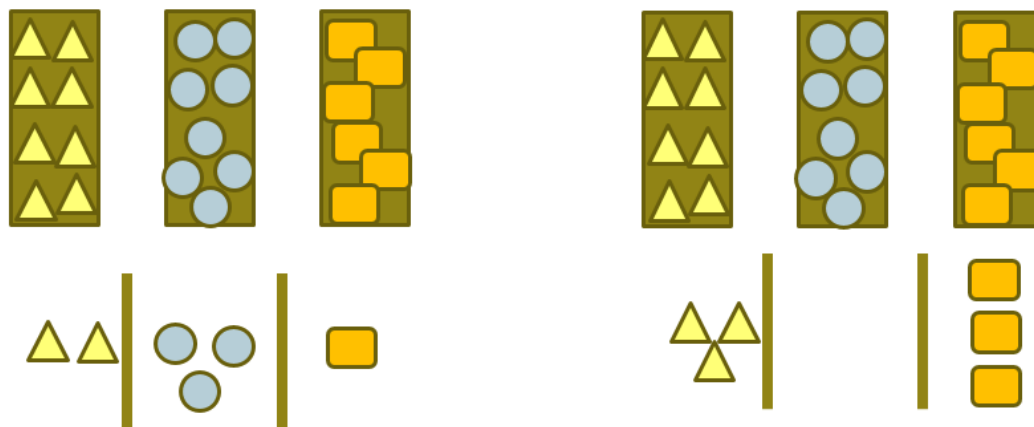
$\{r \cdot 1, (k-1) \cdot 0\}$ 的全排列，故其计数为 $\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = \binom{k+r-1}{r}$. \square



有重复组合计数的应用



- **例1:** 甜点店有3种不同类型的面包，从中选出6块面包的不同方式有多少？假设只关心面包的类型，而不管是具体哪一块面包或者选择的次序



- 此为在3种元素的多重集中计算有重复的6-组合数，根据公式，不同的选择方式有 $\binom{3+6-1}{6} = 28$ 种





有重复组合计数的应用 (续)



■ 例2: 三元一次不定方程 $x + y + z = 11$ 有多少组非负整数解?

- 此为在3种元素的多重集中计算可重复的11-组合数,
根据公式, 该不定方程的非负整数解有 $\binom{3+11-1}{11} = 78$ 组

■ 例3*: 分析箭头指向的语句的执行次数 (思考题)

- 此为在 n 种元素的多重集中计算可重复的 m -组合数, 根据公式, 该条语句在伪代码中的总执行次数为 $\binom{n+m-1}{m}$

```
k := 0
for i1 := 1 to n
  for i2 := 1 to i1
    .
    .
    .
  for im := 1 to im-1
    → k := k + 1
```



本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 6.2节（**请自学**），6.3节、6.5 节
- 课后习题：
 - Problem Set 11 & 12（**第十一讲、第十二讲合一起习题**），其中第十一讲为自学内容
- 提交时间：4月8日 10:00 前

