



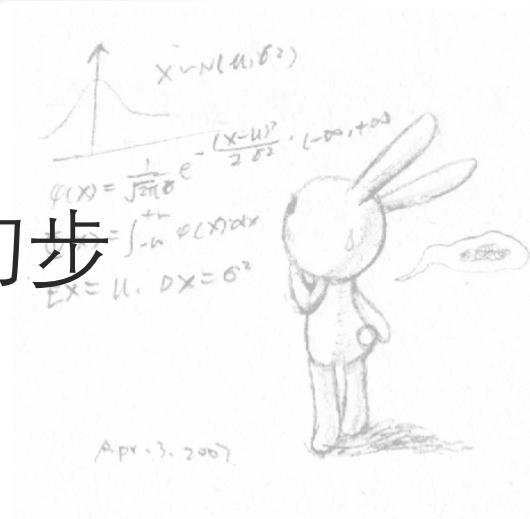
离散数学

Discrete Mathematics

第十三讲：离散概率初步

吴楠

南京大学计算机科学与技术系



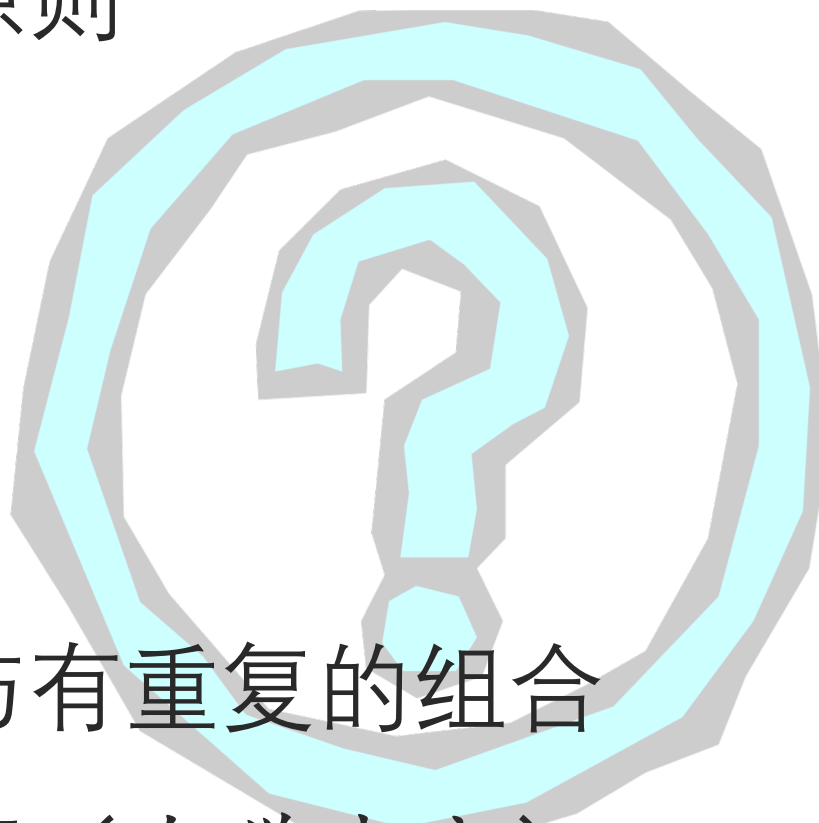
2025 年 4 月 8 日



前情提要



- 乘法原则与加法原则
- r - 排列及其应用
- r - 组合及其应用
- 环排列的计数
- 不可区分的排列与有重复的组合
- 鸽笼原理及其应用（自学内容）





本讲主要内容



- 基本概念：随机事件与概率
- 离散概率引论
- 事件的运算与概率方法
- 离散概率模型：古典概型
- 条件概率及其应用
- 贝叶斯定理及其应用
- 独立事件的概率



LAPLACE'S SUPERMAN

❖ We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes.

❖ Pierre Simon Laplace, *A Philosophical Essay on Probabilities* (1795)

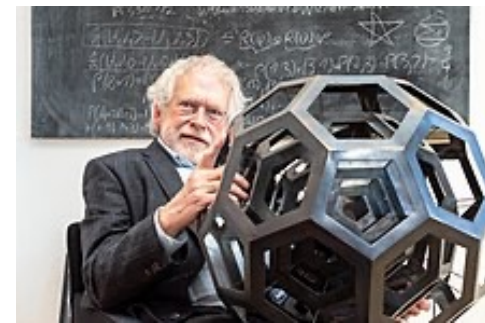


宇宙是确定的还是随机的？



In quantum physics the biggest unsolved problem is the question of what we actually describe in our theory: **What is observation?** and **What is information?**

—— *Anton Zeilinger*



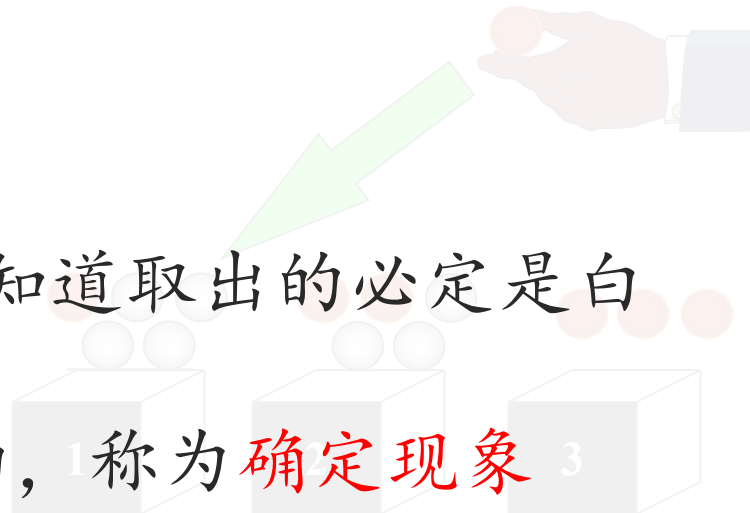


随机现象与随机事件



- **例1:** 一个袋子中有十个完全相同的白球，搅匀后从中任意摸取一球，问取出的球是什么颜色？

- 在没取出球之前，就能知道取出的必定是白色的，这种现象是必然的，称为**确定现象**





随机现象与随机事件（续）



- 例2：一个袋子中有十个完全相同的球，其中5个是白色的，另外5个是黑色的，搅匀后从中任意摸取一球，问取出的球是什么颜色？
 - 在球没有取出以前，我们不能确定取出的球是白的还是黑的；类似这种取出的球的颜色不确定的现象称为随机现象





随机现象与随机事件（续）



- **定义（试验）**：对随机现象的一次观察（observation）称为试验（experiment）
- **定义（随机试验）**：满足以下3个条件的试验称为随机试验（random experiment），有时简称**试验**
 - (1) 试验可以在相同的情形下重复进行；
 - (2) 试验的所有可能结果是明确可知的且不止一个；
 - (3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却不能确定这次试验会出现哪一个结果



随机现象与随机事件（续）



- **定义（样本空间，随机事件）**：随机试验的每一个可能结果称为**基本事件**或**样本点**（sample point），一般用字母 ω 表示；基本事件或样本点的全体（全集）称为**样本空间**（sample space），一般用字母 Ω 或 S 表示；由基本事件构成的 Ω 的子集称为**复杂事件**，一般用大写字母 A, B, C 等表示。无论基本事件还是复杂事件，它们在试验中发生与否都具有**随机性**，所以都称为**随机事件**，简称**事件**



随机现象与随机事件（续）



- 事件有两个极端情况，因为 Ω 是由所有基本事件组成的，在任一次试验中，必然要出现 Ω 中的某一基本事件 ω ，即 $\omega \in \Omega$ ，因此 Ω 必然会发生；故可用 Ω 表示一个必然事件或确定事件
- 相应地， $\emptyset \subseteq \Omega$ ，但在任何一次试验中，均不可能有任何基本事件 $\omega \in \emptyset$ ，也就是说 \emptyset 不可能发生，故可用 \emptyset 表示不可能事件
- 必然事件和不可能事件的发生与否，已经失去了不确定性，因此本质上它们并不是随机事件，但为了理论的完备性，仍把它们看作随机事件的两个极端情形



事件的关系与运算



- **例：**一个盒子中有10个完全相同的球，分别标有号码 $1, 2, \dots, 10$ ；从中任取1个球，令： $i = \{\text{取得的球的标号为} i\}, i = 1, 2, \dots, 10$ ，则：
 - (1) $1, 2, \dots, 10$ 分别叫做：基本事件；
 - (2) $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ 为样本空间；
 - (3) $\{\text{取得球的号码不为} 1, 2, \dots, 10\}$ 为不可能事件；
 - (4) $A = \{\text{取得球的号码为偶数}\}$ 叫做复杂事件；
 - (5) $B = \{\text{取得球的号码} \leq 5\}$ 叫做复杂事件。



事件的关系与运算 (续)



- 如果事件 A 的发生必然意味着事件 B 的发生，则称 B 包含了 A ，并记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ （对任意 A 约定 $\emptyset \subset A$ ）
 - 例：上例中若令 $A = \{\text{球的标号} = 6\}$ ， $B = \{\text{球的标号为偶}\}$ ，则事件 A 的发生就必然意味着事件 B 的发生，故有 $A \subset B$
- 若同时有 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 成立，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$ ；相等的两个事件总是同时发生或同时不发生



事件的关系与运算 (续)



- “事件 A 与 B 中至少有一个发生”，这样的—个事件称作事件 A 与 B 的并（或和），记作 $A \cup B$ 或 $A + B$
 - 例：前例中若令 $A = \{\text{球的标号为偶}\}$ ， $B = \{\text{标号不大于3}\}$ ，则 $A \cup B = \{\text{球的标号为1, 2, 3, 4, 6, 8, 10}\}$
- “事件 A 与 B 同时发生”，这样的—个事件称作事件 A 与 B 的交（或积），记作 $A \cap B$ 或 AB
 - 例：前例中若令 $A = \{\text{球的标号为偶}\}$ ， $B = \{\text{球的标号不大于3}\}$ ，则 $A \cap B = \{\text{球的标号为2}\}$



事件的关系与运算 (续)



- “事件 A 发生而事件 B 不发生”，这样的事件称作事件 A 与 B 的差，记作 $A - B$
 - 例：前例中若令 $A = \{\text{球的标号为偶}\}$ ，
 $B = \{\text{球的标号} \leq 3\}$ ，则 $A - B = \{\text{球的标号为} 4, 6, 8, 10\}$
- “事件 A 与 B 不能同时发生”，即 $AB = \emptyset$ ，称事件 A 与 B 的不相容（或互斥）
 - 例：前例中若令 $A = \{\text{球的标号为偶}\}$ ，
 $B = \{\text{球的标号} = 3\}$ ，则事件 A 与事件 B 不相容



事件的关系与运算 (续)



- 若 A 为一事件, 令 $\bar{A} = \Omega - A$, 称事件 \bar{A} 是 A 的**对立事件**或**逆事件**。显然, 在一次试验中若 A 发生, 则 \bar{A} 必然不发生, 反之亦然; 二者必发生其一且只发生其一, 故有: $\bar{A}A = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = \Omega$, $\bar{\bar{A}} = A$
- **例:** 前例中若令 $A = \{\text{球的标号为偶}\}$, 则 $\bar{A} = \{\text{球的标号为奇}\}$



事件的关系与运算 (续)



■ 事件的关系与集合的运算的对比:

- 样本空间 Ω \Leftrightarrow 全集 Ω
- 基本事件 ω \Leftrightarrow 全集的元素 $\omega \in \Omega$
- (复杂) 事件 \Leftrightarrow 全集的(可测^{*})子集 $A \subseteq \Omega$
- 事件 A 的对立事件 \Leftrightarrow 集合 A 的绝对补集 $\Omega - A$
- 必然事件 \Leftrightarrow 全集 Ω
- 不可能事件 \Leftrightarrow 空集 \emptyset



事件的关系与运算 (续)



- 事件的关系与集合的运算的对比 (设 $A, B \subseteq \Omega$) :
 - 事件 A 发生意味事件 B 发生 $\Leftrightarrow A \subset B$
 - 事件 A 与 B 至少发生一个 $\Leftrightarrow A \cup B$
 - 事件 A 与 B 同时发生 $\Leftrightarrow A \cap B$ 或 AB
 - 事件 A 发生而事件 B 不发生 $\Leftrightarrow A - B$
 - 事件 A 与 B 不相容 $\Leftrightarrow AB = \emptyset$

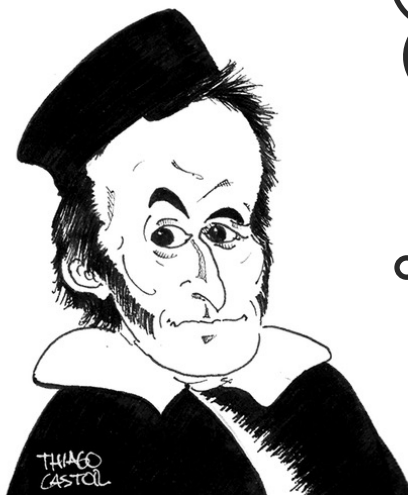


随机事件与概率

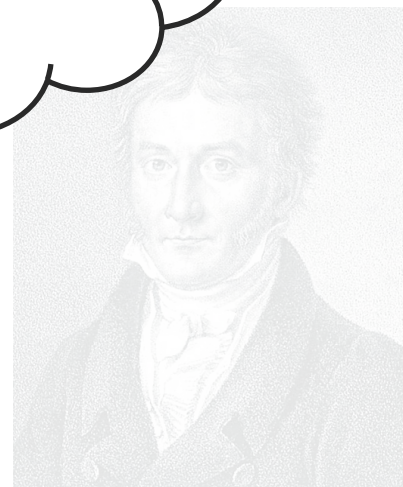


- 研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的**可能性**大小，也就是事件的**概率** (probability)

概率是随机事件发生可能性大小的**度量**。



事件发生的**可能性**越大，**概率**就越大！



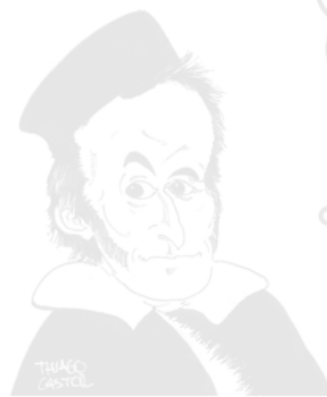


什么是概率？



- **定义（频率）**：在相同的条件下进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 m 与试验次数 n 的比值 $\frac{m}{n}$ 称为本试验中事件 A 发生的**频率**（frequency），记为 $\omega(A)$ 。易见，若 A 为随机试验 E 的任一事件，有：
- (1) $0 \leq \omega(A) \leq 1$
 - (2) $\omega(\Omega) = 1$
 - (3) $\omega(\emptyset) = 0$

事件发生的可能性
越大，概率就
越大！





频率与概率



- **实验：**将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 7 遍，观察正面出现的次数及频率

试验 序号	$n = 5$		$n = 50$		$n = 500$	
	n_A	$\omega_n(A)$	n_A	$\omega_n(A)$	n_A	$\omega_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	262	0.524
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516



频率与概率 (续)



- 历史上有许多人做过抛硬币实验：下表可见，随着试验次数的增多，正面向上的次数稳定地接近 $1/2$

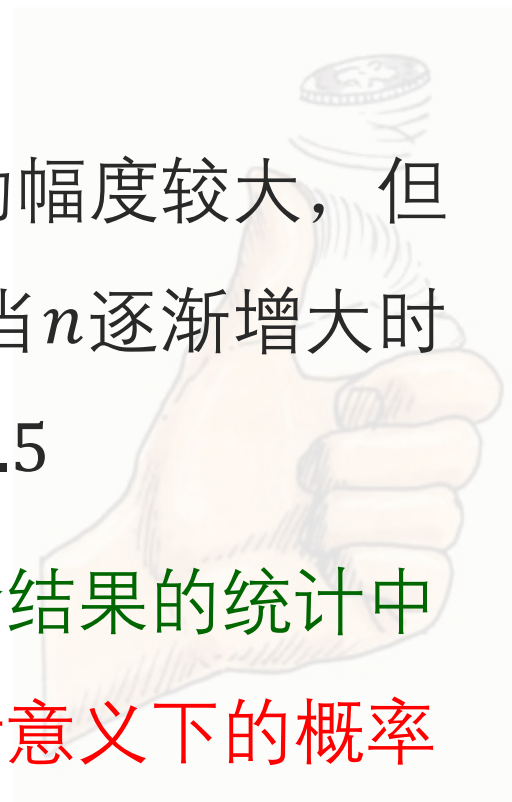
实 验 者	n	m	$\omega(A) = m/n$
德·摩根	2048	1061	0.5181
浦 丰	4040	2048	0.5069
费 勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼洛夫斯基	80640	39699	0.4923



频率与概率 (续)



- 上面的实验数据可看出，频率具有随机波动性，即对于同样的 n ，所得的频率不一定相同
- 抛硬币次数 n 较小时，频率的随机波动幅度较大，但随 n 的增大，频率 ω 呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时频率总是在0.5附近摆动且逐渐稳定于0.5
- 这个稳定值从本质上反映了事件在试验结果的统计中出现可能性的大小，它就是事件在统计意义下的概率





概率的统计定义



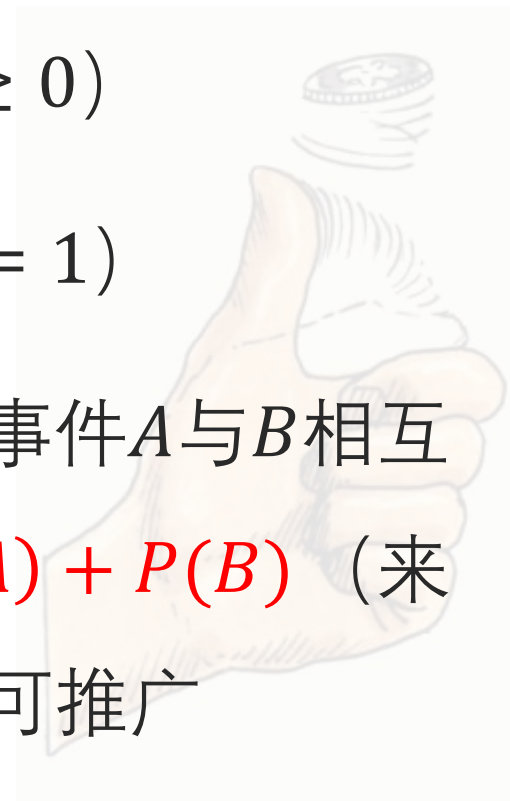
- **定义（概率的统计诠释）**：在随机试验中，若事件 A 出现的频率 m/n 随着试验次数 n 的增加趋于某一常数 p ($0 \leq p \leq 1$)，则定义事件 A 的概率为 p ，记作 $P(A) = p$ （或 $\Pr(A) = p$ 、 $\Pr A = p$ ），此为概率的古典定义
- **诠释**：在此统计定义下，频率被认为是事件发生的概率的统计近似，由于当试验次数足够多时频率趋于稳定，故可以将频率看做概率的一种“度量”



统计定义的概率的性质



- 由统计定义的概率的性质来自于频率的性质：
- (1) 非负性： $P(A) \geq 0$ （来源于 $\omega(A) \geq 0$ ）
- (2) 规范性： $P(\Omega) = 1$ （来源于 $\omega(\Omega) = 1$ ）
- (3) 有限可加性： 若 A, B 互不相容（即事件 A 与 B 相互排斥： $AB = \emptyset$ ），则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ （来源于 $\omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B)$ ），并可推广





统计诠释概率的现实意义



- 由于**频率的稳定性**，通过理论计算或者试验统计获得随机事件的概率，便可推测未来发生该事件的几率，这往往对决策和评估具有现实意义
 - **例如：**了解来商场购物的顾客人数的各种可能性大小，以合理配置服务人员；了解发生意外人身事故的可能性大小，以确定保险金额；了解每年最大洪水超警戒线可能性大小，以确定合理的堤坝高度



概率的公理化定义



- 用频率的统计定义来说明概率有一定的科学性，但定义中所谓频率的稳定性事实上隐含着要做无数次试验来确定某一事件的概率，这很难让人接受
- Hilbert于1900年倡导推动概率的公理化（Hilbert 第六问题），后在1933年由前苏联数学家Колмогоров（柯尔莫戈洛夫）完成。概率的公理化是概率论的发展史上的一个里程碑



概率的公理化定义 (续)



- **定义** (概率的公理化系统, Колмогоров 1933) : 设 Ω 为一样本空间, 如果对任一事件 A , 赋予一个实数 $P(A)$, 若集合函数 $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下系统公理:

- **Ax.1** (非负性) $P(A) \geq 0$;
- **Ax.2** (规范性) $P(\Omega) = 1$;
- **Ax.3** (可列可加性) 若 A_1, A_2, \dots 为互不相容事件, i.e. $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**, 即随机事件 A 发生可能性的度量

- 概率的统计诠释事实上是Колмогоров**大数定律**的反映



离散概率



■ **定义**（离散概率）：设 Ω 为离散样本空间（i.e. 只有有穷个或可数无穷个样本点的样本空间），实函数 $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件：

- (1) $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq p(\omega) \leq 1$;
- (2) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

称 p 为 Ω 上的概率， $p(\omega)$ 是样本点 ω 的概率。事件 A 的概率规定为 $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$



离散概率中事件的性质及运算



- 性质1: 不可能事件的离散概率为0: $P(\emptyset) = 0$
- 性质2: 对任一随机事件 A , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 性质3: 若 $A \supset B$, 则:
 - $P(A - B) = P(A) - P(B)$;
 - $P(A) \geq P(B)$
- 性质4: 对任意的两个事件 A, B 皆有:
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
 - $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ 性质4可由容斥原理进行推广



离散概率的例子



■ 例1：投硬币

○ 样本点： ω_0 （正面向上）、 ω_1 （背面向上），

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}, \quad p(\omega_0) = p(\omega_1) = 1/2$$

■ 例2：摸小球

○ 样本点： ω_i （摸到编号为 i 的小球）， $i = 0, 1, \dots, 9$

$\Omega = \{\omega_i | i = 0, 1, \dots, 9\}$, $p(\omega_i) = 1/10$, $i = 0, 1, \dots, 9$; 记 A :

摸到编号不超过5的小球，则 $A = \{\omega_i | i = 0, 1, \dots, 5\}$, $P(A) = 0.6$



离散概率的例子



■ 例3*：网站访问次数

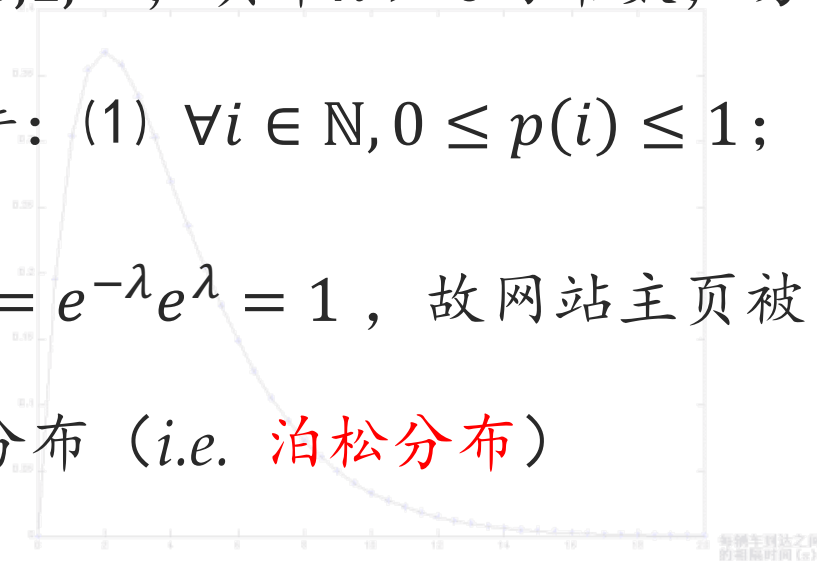
○ 考虑某网站的主页在一天内被访问的次数，则 $\Omega = \mathbb{N}$ ，设

Ω 上的概率 $p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0, 1, \dots$ ，其中 $\lambda > 0$ 为常数，易

验证 $p(i)$ 满足离散概率之条件：(1) $\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq p(i) \leq 1$ ；

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$ ，故网站主页被

访问次数服从某种离散概率分布 (i.e. 泊松分布)





古典概率模型



- **定义**（**古典概率模型**，Laplace）：如果一个随机试验 E 具有以下两个特征：
 - 样本空间的元素（基本事件）**仅有有限个**；
 - 每个基本事件出现的**可能性相同**

则称 E 为拉普拉斯试验，其模型称为古典概率模型（**古典概型**）。古典概型的计算：
$$P(A) = \frac{A \text{ 中样本点的个数}}{\Omega \text{ 中样本点总数}}$$

- **例**：投一枚质地均匀的骰(tóu)子（色子）



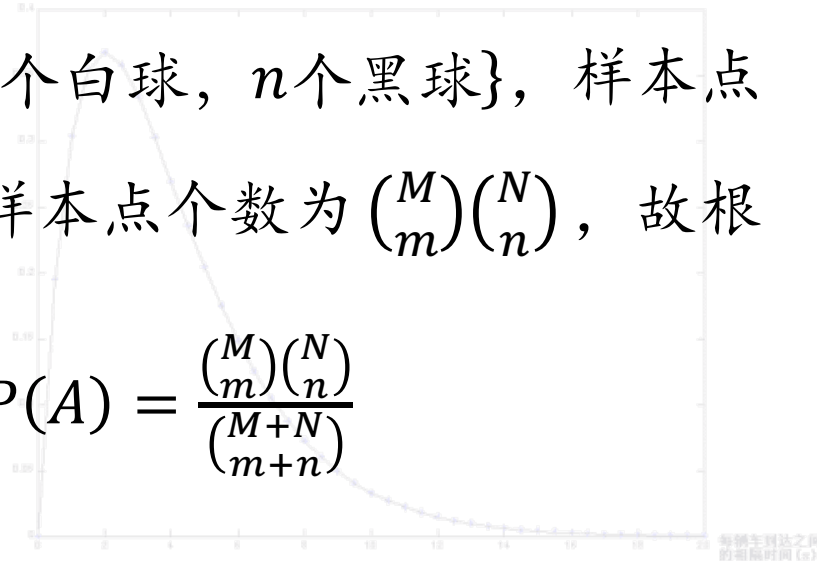
古典概率模型的例子



- **例1（无放回的摸球问题）**：设袋中有 M 个白球和 N 个黑球，现从袋中无放回地依次摸出 $m + n$ 个球，求所取球恰好含 m 个白球， n 个黑球的概率？

○ **解**：设 $A = \{\text{所取球恰好含 } m \text{ 个白球，} n \text{ 个黑球}\}$ ，样本点总数为 $\binom{M+N}{m+n}$ ； A 所包含的样本点个数为 $\binom{M}{m}\binom{N}{n}$ ，故根

据古典概型，所求概率为：
$$P(A) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N}{n}}{\binom{M+N}{m+n}}$$

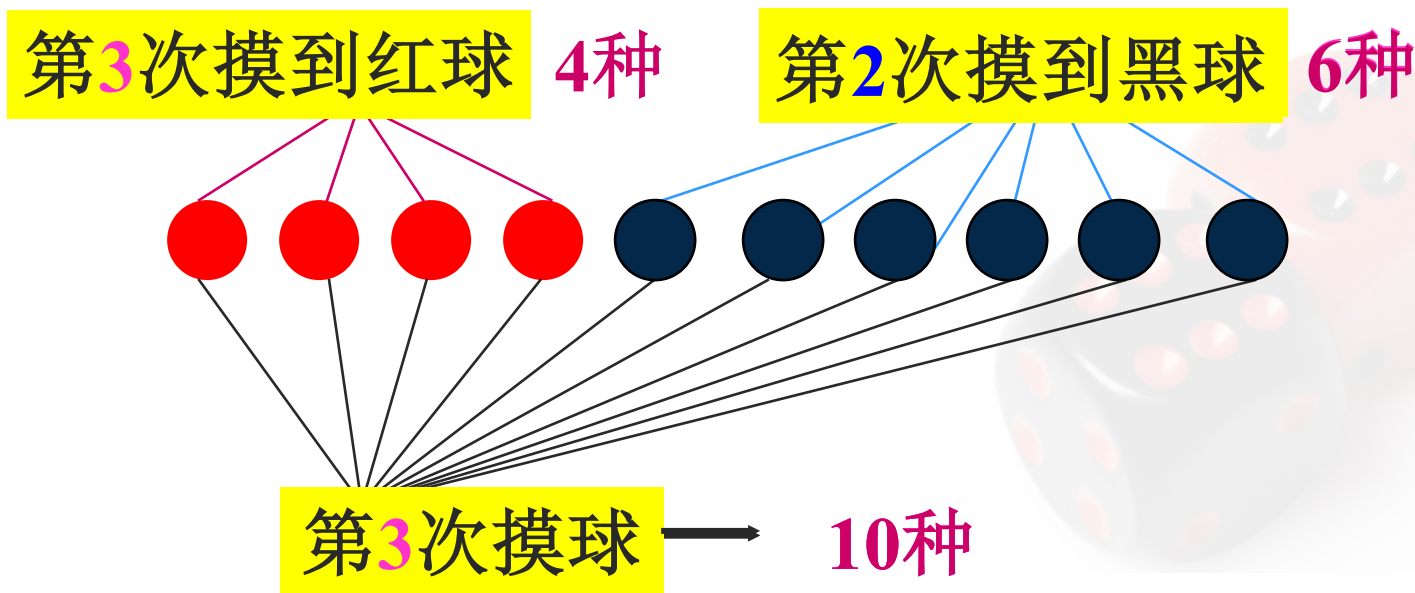




古典概率模型的例子（续）



- **例2（有放回的摸球问题）**：设袋中有4只红球和6只黑球，现从袋中有放回地摸球3次，求前2次摸到黑球且第3次摸到红球的概率？



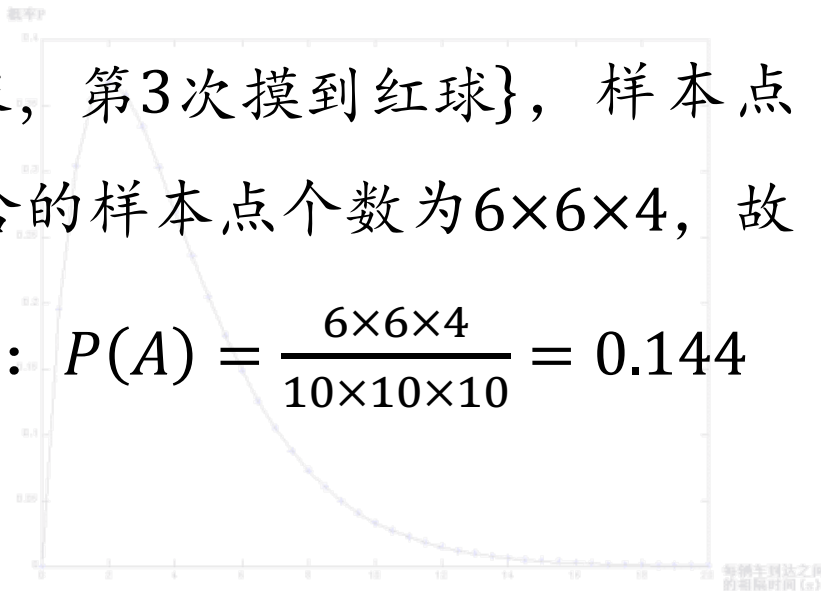


古典概率模型的例子（续）



- **例2（有放回的摸球问题）**：设袋中有4只红球和6只黑球，现从袋中有放回地摸球3次，求前2次摸到黑球且第3次摸到红球的概率？

- **解：**设 $A = \{\text{前2次摸到黑球，第3次摸到红球}\}$ ，样本点总数为 $10 \times 10 \times 10$ ； A 所包含的样本点个数为 $6 \times 6 \times 4$ ，故根据古典概型，所求概率为：
$$P(A) = \frac{6 \times 6 \times 4}{10 \times 10 \times 10} = 0.144$$





古典概率模型的例子 (续)



■ 课堂练习:

- (1) 电话号码问题: 在7位数的电话号码中 (首位可以为0), 求各位数字互不相同的概率? $P(10,7)/10^7$
- (2) 扑克牌问题: 在一副正牌中随机抽一手 (5张) 牌, 一色的 $4 \binom{13}{5} / \binom{52}{5}$? 3A加一对子 $\binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} / \binom{52}{5}$
- (3) 生日问题: 某班20位学生都是同一年出生的, 求有10位学生生日是1月1日, 另外10位学生生日12月31日的概率? $\frac{\binom{20}{10} \binom{10}{10}}{365^{20}}$



古典概率模型的例子 (续)



■ **例 (生日问题)** : 某班级有 n 个人($n < 365$), 则至少有两个人的生日在同一天的概率?

○ **解**: 假定按一年365天计算, 令:

$A = \{n \text{ 个人中至少有2人的生日相同}\}$, 则 $\bar{A} = \{n \text{ 个人的生日完全不同}\}$, 故有:

基本事件总数 = $\frac{365^n}{}$;

\bar{A} 中基本事件个数 = $\frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{}$;

故由古典概型: $P(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$



古典概率模型的例子（续）



■ **例（生日问题）**：某班级有 n 个人($n < 365$)，则至少有两个人的生日在同一天的概率？

○ **解（续）**：故 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 -$

$$\frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}.$$

n	10	20	23	30	40	50	58
$P(A)$	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97	0.99

可见，在班级人数超过一定数量时“班级中至少有两人

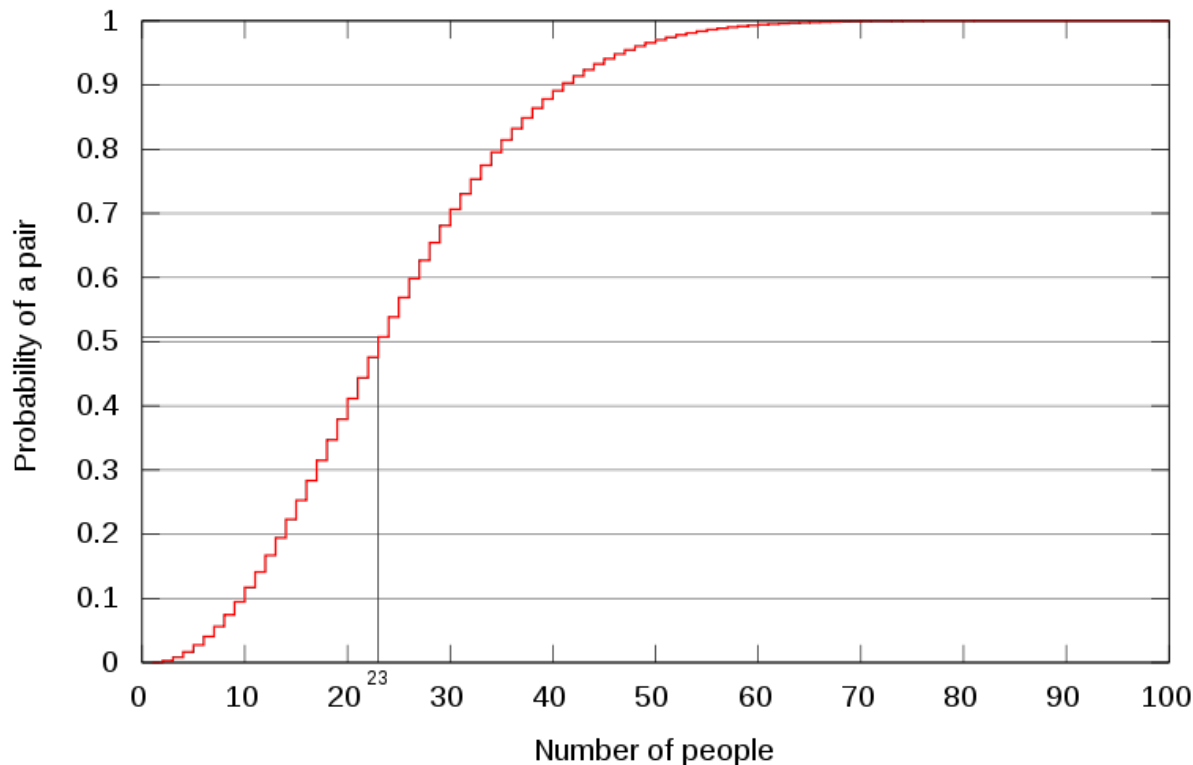
生日相同”这件事发生的概率是相当大的



古典概率模型的例子（续）



- **例（生日问题）**：某班级有 n 个人($n < 365$)，求至少有两个人的生日在同一天的概率？





条件概率的引入



- **引例1:** 抛掷一颗匀质骰子，观察出现的点数，求出现的点数为不小于3的偶数的概率
 - **解:** 设（复杂）事件 A 表示出现的点数为不小于3的偶数，则样本空间大小： $n = 6$ ， A 包含的基本事件为“出现 4 点”和“出现 6 点”，即 $m = 2$ ，故根据古典概型， $P(A) = \frac{m}{n} = 1/3$.



条件概率的引入 (续)



- **引例2:** 抛掷一颗匀质骰子, 若已观察到掷出的点数为偶数, 求出现的点数为2的概率
 - **解:** 设事件 A 表示出现的点数为2; 事件 B 表示出现的点数为偶数, 则待解问题是求在事件 B 已发生的基础上事件 A 发生的概率。若 unlimited, 则事件 A 发生的概率是 $P(A) = 1/6$; 而在事件 B 已发生的情况下, 试验所有可能的结果即为 B , 共3个元素, 它们的出现是等可能的, 其中只有1个元素在集合 A 中, 于是所求概率为 $1/3$. □



条件概率的引入 (续)



- **定义 (条件概率)** : 在事件 B 已经发生的条件下事件 A 发生的概率, 称为**条件概率** (conditional probability), 记为 $P(A|B)$ (英文读作 “the conditional probability of A given B ”)



概率乘法公式与条件概率公式



- 由引例2易见：事件 A （抛出2点）与事件 B （抛出偶数点）的关系为 $A \subset B$ ，故两事件同时发生的概率为 $P(AB) = P(A) = 1/6$ ；根据乘法原理，两事件同时发生（*i.e.*抛出的为偶数点且为2）的概率为抛出偶数点的概率 $P(B)$ 乘以（在抛出偶数点已发生时）又抛出2点的概率 $P(A|B)$ ，即**概率乘法公式**： $P(AB) = P(A|B)P(B)$ ，可得条件概率公式：

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$



条件概率的性质



- 条件概率 $P(\cdot | B)$ 具有以下三个基本性质：
 - (1) 非负性：对任意事件 A , $P(A|B) \geq 0$;
 - (2) 规范性： $P(\Omega|B) = 1$;
 - (3) 可列可加性： 设 A_1, A_2, \dots 为互不相容事件, *i.e.* $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i|B)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$
- 易见, 若 $P(B) > 0$, 则 $P(\cdot | B)$ 满足概率的公理化定义, 故 $P(\cdot | B)$ 是 Ω 上的一个概率, 特别当 $B = \Omega$ 时, $P(\cdot | B)$ 就是原来的概率 $P(\cdot)$, 也就是说 $P(\cdot | B)$ 是将原来的样本空间 Ω 缩减为 B 之后的事件 “.” 的概率



条件概率的应用



- 例1 (**Girl or boy paradox**): 一家中有两个孩子, 已知其中有一个是女孩, 这时另一个孩子也是女孩的概率是多少? (假定一个孩子是男孩还是女孩是等可能的)

- **解:** 问题的样本空间为 (男孩用 B 表示, 女孩用 G 表示)
 $\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$, 根据问题, 设事件 $B =$
{有一个孩子是女孩} = $\{BG, GB, GG\}$; 事件 $A =$
{另一个孩子也是女孩} = $\{GG\}$; 则: (1)由条件概率公式
计算: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{4} / \frac{3}{4} = 1/3$; (2)在缩减样本空间
 B 上计算: $P(A|B) = \frac{|A|}{|B|} = 1/3$



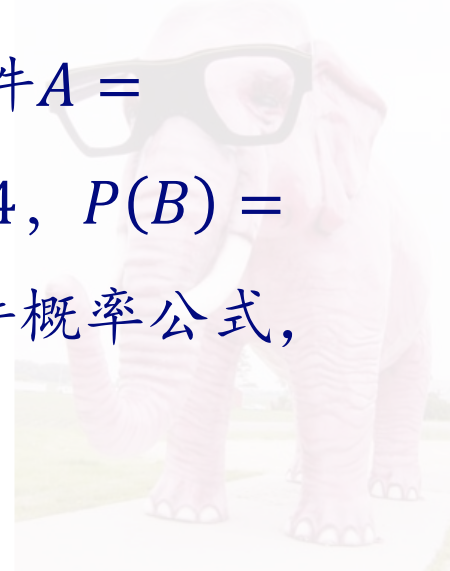
条件概率的应用（续）



- **例2：** 设某种动物由出生算起活到20年以上的概率为0.8，活到25年以上的概率为0.4；问现年20岁的这种动物，它能活到25岁以上的概率是多少？

○ **解：** 设事件 $B = \{\text{可以活到20年以上}\}$ ；事件 $A = \{\text{可以活到25年以上}\}$ ；由题设， $P(A) = 0.4$ ， $P(B) = 0.8$ ， $A \subset B$ 且事件 B 已经发生，故根据条件概率公式，

$$\text{有： } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = 0.5$$





条件概率的应用（续）

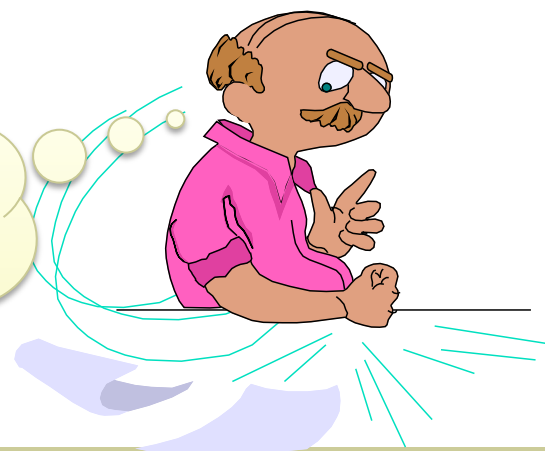


- **例3（抽签问题）**：一场精彩的足球赛将要举行，5个球迷只拿到了1张入场券，大家都想去，只好用抽签的方法来解决：5张同样的卡片，只有一张上写有“入场券”，其余的为空白。将它们放在一起洗匀，让5个人依次抽取。每人抽签之后**秘不示人且不放回**，只待最后揭晓。由此引发讨论：



“因为入场券抽出后就没有了，先抽的人比后抽的人机会大！”

“大家不必争先恐后，按次序来，谁抽到的机会都一样大！”





条件概率的应用（续）



- **解（抽签问题概率分析）**：用 A_i 表示事件“第 i 个人抽到入场券（ $i = 1, 2, \dots, 5$ ）”
 - 第一人抽签时：显然有： $P(A_1) = 1/5$ ， $P(\overline{A_1}) = 4/5$ ；
 - 第二人抽签时：由于第1人抽中与否的信息未向外泄露，若要抽中，必然蕴含条件“第1人未抽中”，故由乘法原理，事件 $A_2 = \overline{A_1}A_2$ ，故由条件概率得： $P(A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1/5$ ；
 - 第三人抽签时：第1、2人抽中与否的信息均未知，故若要抽中，必然蕴含前两人均未抽中，即 $A_3 = \overline{A_1}\overline{A_2}A_3$ ，由条件概率公式： $P(A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\overline{A_2}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = 1/5$ ；
 - 以此类推：每人抽中的概率均为 $1/5$ ，故**不泄露信息的抽签问题**中抽中的概率与顺序无关，等同于**有放回的摸球问题**



条件概率的应用（续）



- **例4（三囚犯谜题）**：监狱看守通知三个囚犯，在他们中要随机选出一个赦免，而另外两个将被处决。待看守选定后，囚犯甲请求看守秘密地告诉他，另外两个囚犯中谁将被处决，请问他的做法是否明智？



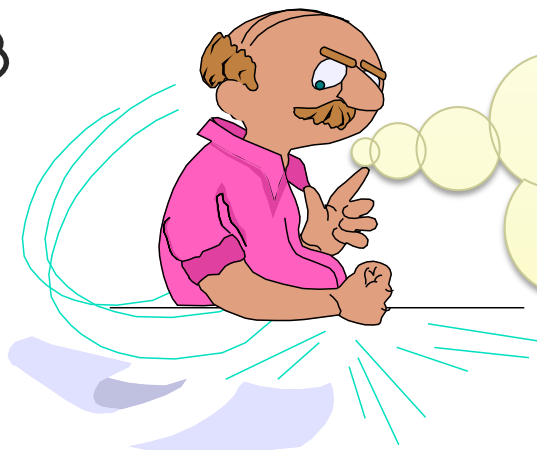
如果我知道同伙中谁被处决，那么剩下的2人中必有一人被赦免，所以我被赦免的概率就从 $1/3$ 增加到了 $1/2$ ！



条件概率的应用（续）



- 例4（三囚犯谜题）：监狱看守通知三个囚犯，在他们中要随机选出一个赦免，而另外两个将被处决。待看守选定后，囚犯甲请求看守秘密地告诉他，另外两个囚犯中谁将被处决，请问他的做法是否明智？



No!

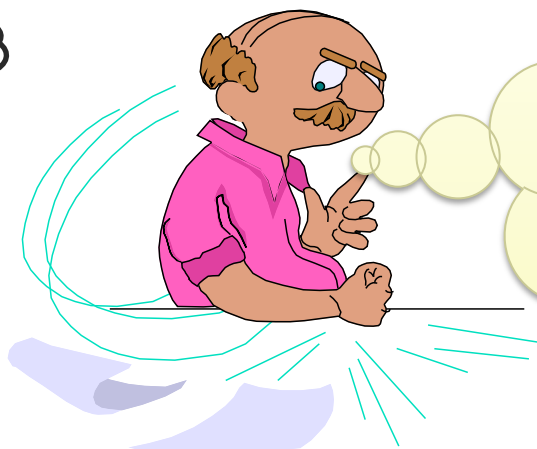
如果你知道了你的同伙中谁将被处决，那么你自己被赦免的概率依然为 $\frac{1}{3}$ ，而剩下的一个同伴被赦免的概率将增加到 $\frac{2}{3}$ ！



条件概率的应用（续）



- **例4（三囚犯谜题解）**：记事件 $A = \{\text{囚犯甲被赦免}\}$ ， $B = \{\text{囚犯乙被赦免}\}$ ， $C = \{\text{囚犯丙被赦免}\}$ 。无附加条件（i.e. 信息无泄漏）时， $P(A) = 1/3$ ；当甲知道囚犯乙将被处决，该信息中不涉及事件 A ，所以 $P(A) = 1/3$ ， $P(B) = 0$ ， $P(C) = P(B \cup C) = 1 - P(A) = 2/3$ ，因此看守的结论是正确的



No!

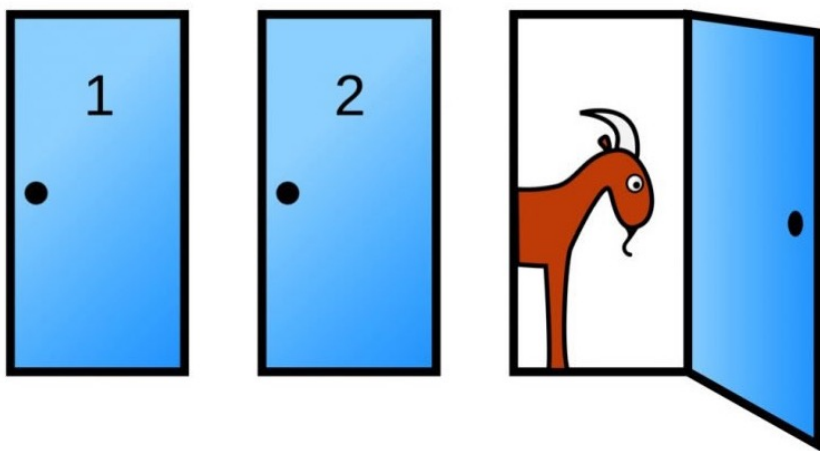
如果你知道了你的同伙中谁将被处决，那么你自己被赦免的概率依然为 $1/3$ ，而剩下的一个同伴被赦免的概率将增加到 $2/3$ ！



条件概率的应用（续）



- **例5（三门问题，Monty Hall problem）**：假设你正在参加一个有奖游戏：在三扇门中选择一扇打开后可以获得后面的奖品。主持人会告诉你其中一扇后面有一辆车，其余两扇后面则是山羊。首先你选择了一道门；然后知道门后面有什么的主持人会开启另一扇后面有山羊的门。然后主持人问你：“**你想改变主意而选择另外一扇门吗？**”





条件概率的应用 (续)



MATLAB 7.12.0 (R2011a)

File Edit Debug Parallel Desktop Window Help

Current Folder: C:\Program Files\MATLAB\R2011a\bin

Shortcuts How to Add What's New

Current Folder

- MATLAB
- R2011a
- bin

Name

- m3registry
- registry
- util
- win64
- deploytool.bat
- insttype.ini
- lccdata.xml
- lccdata.xsd
- license.txt
- matlab.bat
- matlab.exe
- mbuild.bat
- mcc.bat
- mex.bat
- mex.pl
- mexext.bat
- mexsetup.pm
- mexutils.pm
- mw_mpiexec.bat
- ProductRoots
- Untitled.m
- Untitled2.asv
- Untitled2.m
- Untitled3.m
- worker.bat

Details

Select a file to view details

Command Window

New to MATLAB? Watch this [Video](#), see [Demos](#), or read [Getting Started](#).

改變對
答案：3 玩家開始選：3 告知非答案：1 玩家改變選：2
不改變對
答案：2 玩家開始選：1 告知非答案：3 玩家改變選：2
改變對
答案：1 玩家開始選：3 告知非答案：2 玩家改變選：1
改變對
答案：1 玩家開始選：2 告知非答案：3 玩家改變選：1
改變對
答案：1 玩家開始選：2 告知非答案：3 玩家改變選：1
改變對
答案：3 玩家開始選：1 告知非答案：2 玩家改變選：3
改變對
答案：3 玩家開始選：3 告知非答案：2 玩家改變選：1
不改變對
答案：3 玩家開始選：1 告知非答案：2 玩家改變選：3
改變對
答案：1 玩家開始選：3 告知非答案：2 玩家改變選：1
改變對
答案：2 玩家開始選：3 告知非答案：1 玩家改變選：2
改變對
答案：2 玩家開始選：1 告知非答案：3 玩家改變選：2
改變對
答案：1 玩家開始選：2 告知非答案：3 玩家改變選：1
改變對
答案：3 玩家開始選：3 告知非答案：2 玩家改變選：1
不改變對
答案：3 玩家開始選：3 告知非答案：2 玩家改變選：1
不改變對
答案：1 玩家開始選：3 告知非答案：2 玩家改變選：1
改變對
改變對率：0.666684
不改變對率：0.333316

Workspace

Name	Value	Min
answer	1	1
change	666684	666684
i	1000000	1000...
nochange	333316	333316
player	3	3
playerchange	1	1
playerelse	2	2
selectamount	3	3
tellplayer	2	2
tellplayerelse	1	1
testamount	1000000	1000...

Command History

```
randi(1,2,3)  
randi(1,3,1)  
randn(1,2,3)  
a(a~=2)  
clear;clc  
playerelse=playerelse(playerelse~=2)  
clear;clc  
3  
4  
5  
3  
4  
3  
4  
3
```



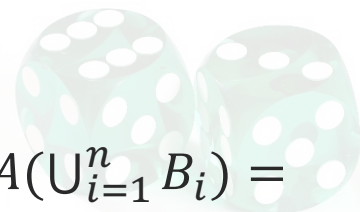
全概率公式



- **定义（样本空间的划分）**：设样本空间 Ω ，如果事件 B_1, B_2, \dots, B_n 两两互不相容且 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ ，则称 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间 Ω 的一个划分（partition，或称分划）
- **定理（全概率公式）**：设 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间的一个划分且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$ ， A 是任一随机事件，则：

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

- **证明**：由于 B_1, B_2, \dots, B_n 互不相容，事件 $A = A\Omega = A(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \bigcup_{i=1}^n AB_i$ ，故 $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^n AB_i) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$. \square





全概率公式的讨论



$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

- 由全概率公式不难看出，“全部”概率 $P(A)$ 被分解为许多“部分”概率之和
- 全概率公式的理论和实际意义在于：在较复杂情况下直接计算 $P(A)$ 不易，但 A 总伴随着某些 B_i 出现，同时 $P(B_i)$ 和 $P(A|B_i)$ 则较易通过观察或经验获



全概率公式的讨论 (续)



$$\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i) = P(A)$$

- 反过来考虑，某一事件 A 的发生有各种可能的原因，如果 A 是由原因 $B_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 所引起，则 A 发生的概率可由全概率公式给出——每一原因都可能导致 A 的发生，故 A 发生的概率是各原因引起 A 发生概率的总和，故可形象地将全概率公式视为“由原因推结果”



全概率公式的应用



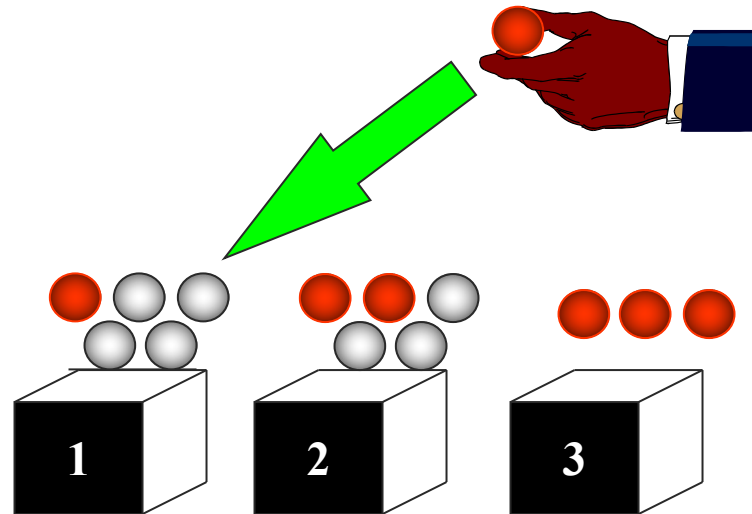
- **例：**为了解一只股票未来一定时期内价格的变化，往往会去分析影响股票价格的基本因素，比如利率的变化。现假设人们经分析估计未来利率下调的概率为60%，利率不变的概率为40%。根据经验人们估计，在利率下调的情况下，该股票的价格上涨的概率为80%，而在利率不变的情况下，其价格上涨的概率为40%，求该只股票未来上涨的概率
- **解：**记事件 A 为“利率下调”， \bar{A} 即为“利率不变”；记事件 B 为“股票价格上涨”；依题意， $P(A) = 0.6$ ， $P(\bar{A}) = 0.4$ ， $P(B|A) = 0.8$ ， $P(B|\bar{A}) = 0.4$ 。故由全概率公式，有：
$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.4 = 0.64$$
，即该只股票未来上涨的概率为64%



贝叶斯定理



- **引例：**三个箱子，分别编号为1、2、3；1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2个红球3个白球，3号箱装有3个红球。某人从任一箱中任意摸出一球，发现是红球。(1)求该球是取自1号箱的概率；(2)该球取自哪号箱的可能性最大？
- 此类问题在实际中更为常见，它所求的是条件概率，是**已知某结果发生条件下**，求各**原因**发生可能性大小





贝叶斯定理 (续)



- **引例：**三个箱子，分别编号为1、2、3，1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2个红球3个白球，3号箱装有3个红球。某人从任一箱中任意摸出一球，发现是红球；求该球是取自1号箱的概率
- **解：**记事件 $A_i = \{\text{球取自第}i\text{号箱}\}, i = 1, 2, 3$ ， $B = \{\text{摸出红球}\}$ 。问题是求 $P(A_1|B)$ 。由条件概率公式：

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)}$$

用全概率公式
计算 $P(B)$

将此公式一般化，便得到贝叶斯 (Bayes) 定理



贝叶斯定理 (续)



- **定理 (贝叶斯定理)** : 设 B_1, B_2, \dots, B_n 是样本空间的一个划分且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, A 是任一随机事件, 则:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$$

- **证明**: 由条件概率公式: $P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$, 再分别对分子和分母用概率乘法公式和全概率公式即得. \square



全概率公式和贝叶斯定理的讨论



- 全概率公式和逆概率公式都需找一个两两互不相容事件组： B_1, B_2, \dots, B_n ，且 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$
- 将事件 B_1, B_2, \dots, B_n 视为导致事件 A 发生的原因，这些原因的概率 $P(B_i)$ 称为“先验概率 (prior probability)”，先验概率一般根据经验得到或容易求得；由先验概率推导事件 A 的发生概率，用全概率公式
- 贝叶斯定理（或称逆概率公式）是已知结果推原因，即用 A 事件的发生来检验先验概率，即 $P(B_i|A)$ 与 $P(B_i)$ 的差别，前者也叫做“后验概率 (posterior probability)”



概率的加法公式与乘法公式



- 概率的加法公式和乘法公式均用来计算比较复杂的事件的概率，它们的适用事件不同：
- 加法公式要求事件之间**互斥**： $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $AB = \emptyset$
- 乘法公式只要求 $P(A) > 0$ ： $P(AB) = P(A)P(B|A)$ ，一般情况下 $P(B|A) \neq P(B)$ ，除非……



独立事件



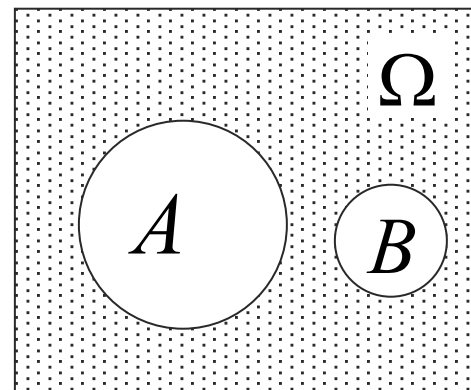
- 前面讨论已知，在事件 B 发生的条件下发生事件 A 的条件概率一般不等于 A 的无条件概率，但会不会出现 $P(A) = P(A|B)$ 的情形呢？
 - **例：**将一颗匀质骰子连掷两次，设事件 $A = \{\text{第二次掷出6点}\}$ ， $B = \{\text{第一次掷出6点}\}$ ，显然有 $P(A|B) = P(A)$
- 已知事件 B 发生了，但它并不影响事件 A 发生的概率，这时称事件 A 与事件 B **独立** (independent)
- 在两事件独立时由概率乘法公式 $P(AB) = P(A)P(B|A)$ ，得 $P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$



独立事件（续）



- 定义（独立事件）：任意两事件 A 、 B ，若 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则称事件 A 与事件 B 相互独立
- 易验证必然事件 Ω 和不可能事件 \emptyset 与任何事件均相互独立
- 独立与不相容的联系：若事件 A 与 B 不相容，则 $P(A) \neq 0 \wedge P(B) \neq 0 \rightarrow P(A)P(B) \neq 0$ ，而 $P(AB) = 0$ ，故事件 A 与 B 不独立

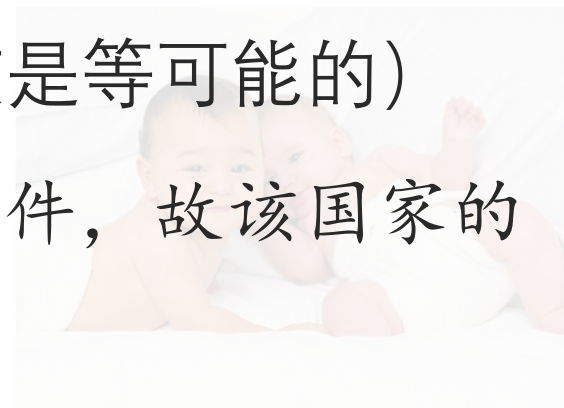




独立事件（续）



- **例（男女比例谜题）**：在某个国家，人们只想要男孩，每个家庭都会一直要孩子直到得到一个男孩。如果生的是女孩，他们就会再生一个；如果生的是男孩，就不再生了。假设生男孩和生女孩的概率相等，那么经过足够长时间，这个国家的男女比例将会如何？（假定生男孩还是生女孩是等可能的）
- **答：**因为生男孩和生女孩是独立事件，故该国家的男女比例将保持1:1





本次课后作业



- 教材内容: [Rosen] 7.1–7.3 节
- 课后习题:
 - Problem Set 13 & 14
- 提交时间: 4月15日 10:00 前

