



离散数学

Discrete Mathematics

第十五讲：关系的性质

吴楠

南京大学计算机学院

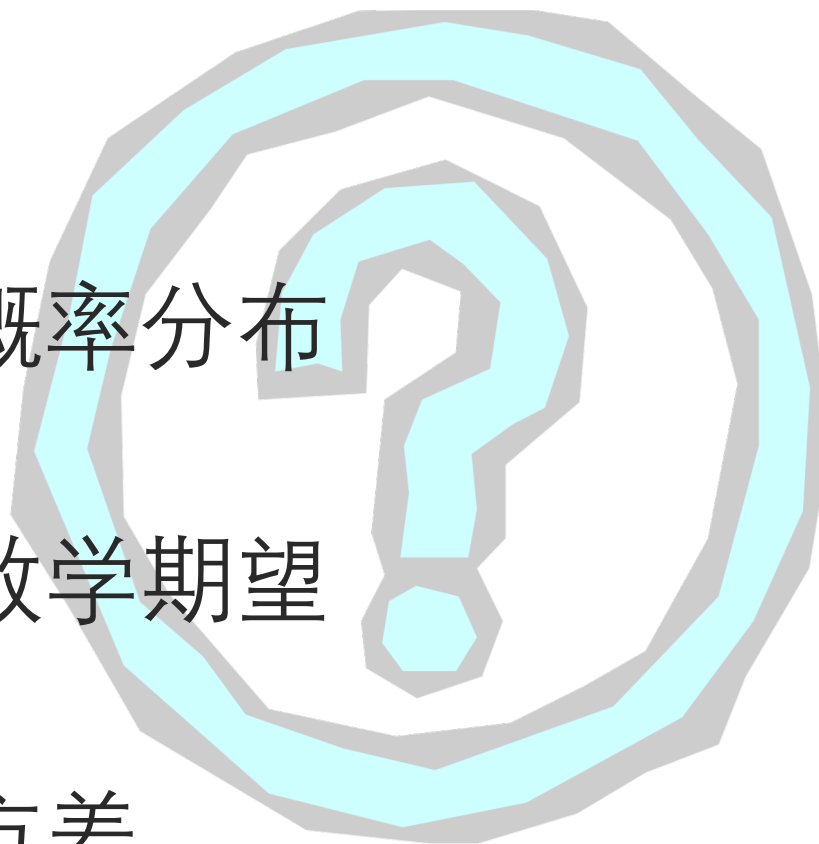
2025年4月8日



前情提要



- 离散随机变量
- 离散随机变量的概率分布
- 离散随机变量的数学期望
- 离散随机变量的方差





本讲主要内容



- 几类具有特殊性质的关系
- 性质满足的充分必要条件
- 性质与运算之间的关联
- 等价关系
- 等价关系与集合划分的对应
- 关系的闭包





关系的性质



- 人们通常把集合 A 上的关系按其性质进行分类，在此我们引入常见的几种性质：

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性





自反性



■ 集合 A 上的关系 R :

- R 在 A 上自反 (reflexive) 指: $(\forall x \in A)(xRx)$
- R 在 A 上反自反 (irreflexive) 指: $(\forall x \in A)(\neg xRx)$

■ 注意反自反与“非自反”的区别

■ 设 $A = \{1,2,3\}$, $R \subseteq A \times A$, 则:

- $\{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ 是 自反的
- $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是 反自反的
- $\{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ 是 既不自反也不反自反的





自反的充分必要条件



- 定理: R 是 A 上的自反关系当且仅当 $I_A \subseteq R$

必要性. (注: 本讲中 $\langle x, y \rangle$ 均指序偶, 与 (x, y) 同含义)

任取 $\langle x, y \rangle$, 由于 R 在 A 上自反必有

$$\langle x, y \rangle \in I_A \Rightarrow x, y \in A \wedge x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

从而证明了 $I_A \subseteq R$

充分性.

任取 x , 有

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

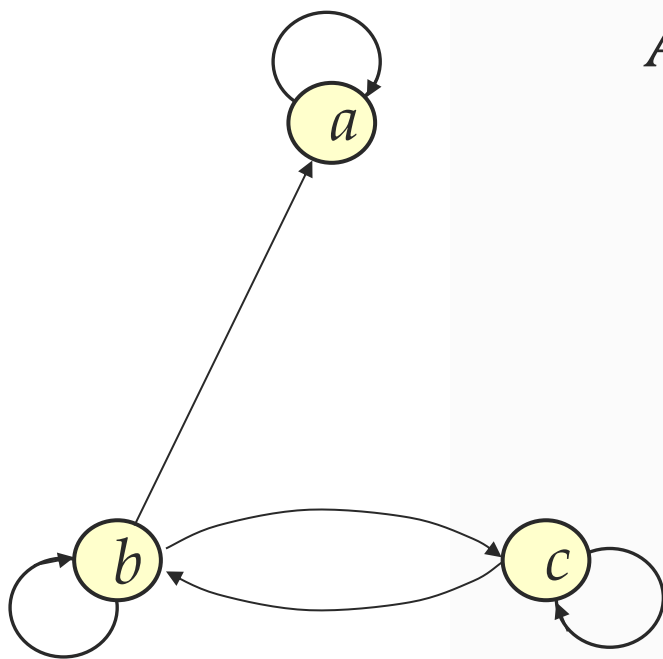
- 推论: R 是 A 上的反自反关系当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$



自反关系的关系图与关系矩阵



$$R = \{(a, a), (b, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$$



$$A = \{a, b, c\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



对称性



■ 集合 A 上的关系 R :

- R 在 A 上对称 (symmetric) 指:

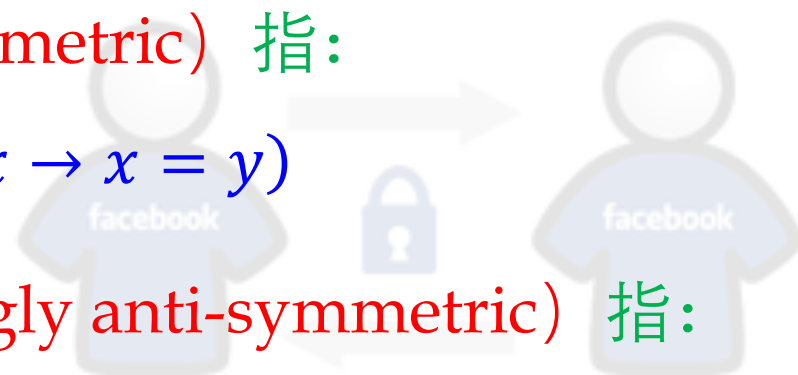
$$(\forall x, y \in A)(xRy \rightarrow yRx)$$

- R 在 A 上反对称 (anti-symmetric) 指:

$$(\forall x, y \in A)(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$

- R 在 A 上强反对称* (strongly anti-symmetric) 指:

$$(\forall x, y \in A)(xRy \rightarrow \neg yRx)$$





对称性 (续)



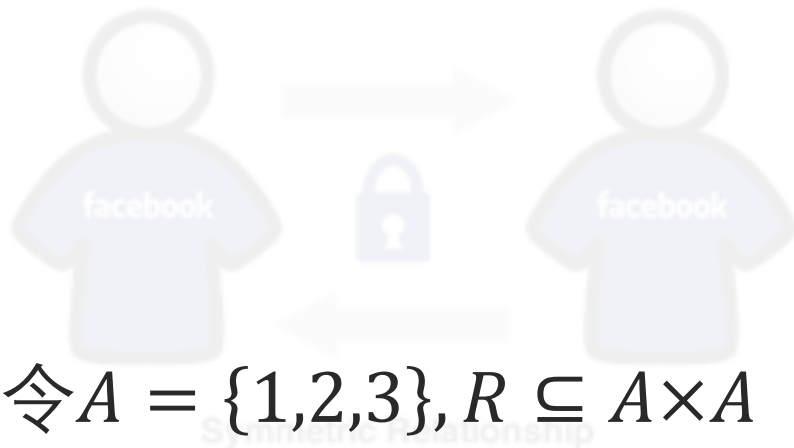
- **练习：** 设 $A = \{1,2,3\}$, $R \subseteq A \times A$
 - $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (3,3)\}$ 是 对称的
 - $\{(1,2), (2,3), (2,2), (3,1)\}$ 是 反对称的
 - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是 既是反对称的，也是强反对称的



正确理解对称性的定义



- 关系 R 满足**对称性**: $(\forall x, y \in A)(xRy \rightarrow yRx)$
 - 考虑蕴含式的成立条件, 若 R 为空关系 \emptyset , 则 xRy 恒假, 但逻辑命题仍然成立
- 因此: **空关系 \emptyset 是对称关系**
- 反对称并不是对称的否定: 令 $A = \{1, 2, 3\}, R \subseteq A \times A$
 - $\{(1, 1), (2, 2)\}$ 既是对称的, 也是反对称的
 - \emptyset 是对称关系, 也是反对称关系, 同时还是强反对称关系





对称的充分必要条件



- 定理: R 是集合 A 上的对称关系当且仅当 $R = R^{-1}$

必要性.

任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle$, 由 $R = R^{-1}$ 得

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

所以 R 在 A 上是对称的.



对称的充分必要条件 (续)



- 定理: R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

必要性.

任取 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \\ \Rightarrow & x=y \wedge x, y \in A \quad (\text{因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是反对称的}) \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle \in I_A \end{aligned}$$

这就证明了 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle$,

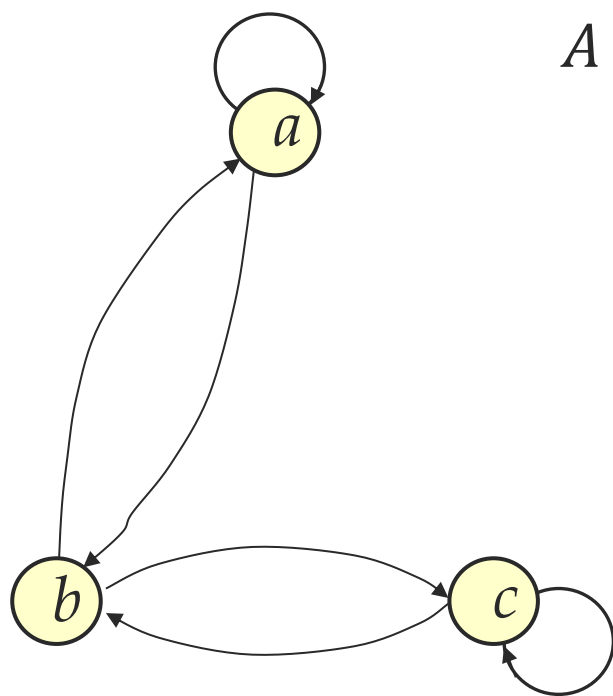
$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle \in I_A \quad (R \cap R^{-1} \subseteq I_A) \\ \Rightarrow & x=y \end{aligned}$$



对称关系的关系图与关系矩阵



$$R = \{(a, a), (b, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$$



$$A = \{a, b, c\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Symmetric Relationship



传递性



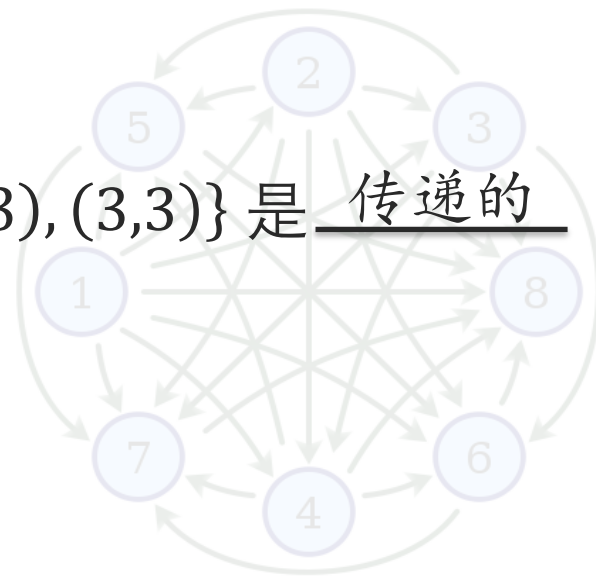
■ 集合 A 上的关系 R :

- R 在 A 上**传递** (transitive) 指:

$$(\forall x, y, z \in A)(xRyRz \rightarrow xRz)$$

■ 设 $A = \{1,2,3\}$, $R \subseteq A \times A$, 则:

- $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ 是 传递的
- $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是 非传递的
- $\{(1,3)\}$ 是 传递的
- \emptyset 是 传递的





传递的充分必要条件



- 定理: R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

必要性.

任取 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \quad (\text{因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是传递的})$$

所以 $R \circ R \subseteq R$.

充分性.

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$, 则

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

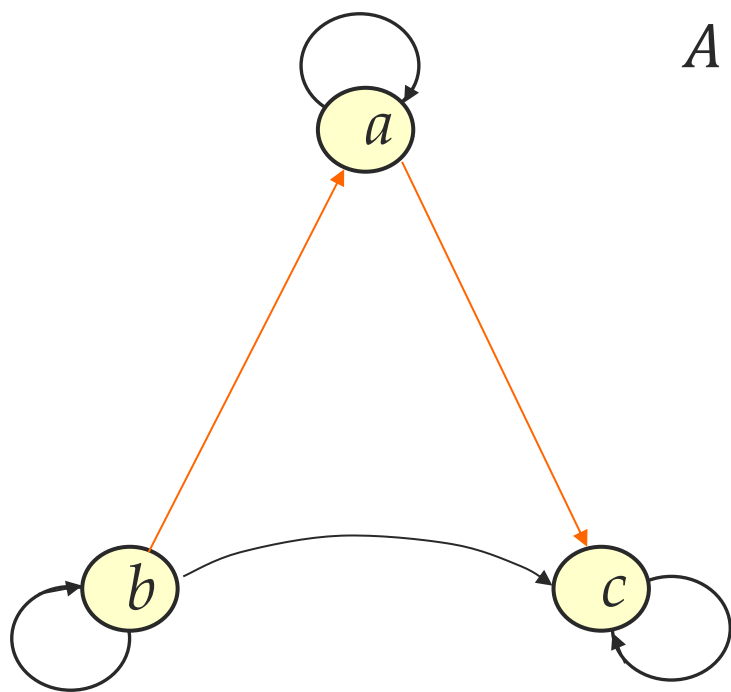
所以 R 在 A 上是传递的.



传递关系的关系图和关系矩阵



$$R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c)\}$$



$$A = \{a, b, c\}$$

A relation matrix M_R is shown, represented as a 3x3 matrix. The matrix is:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

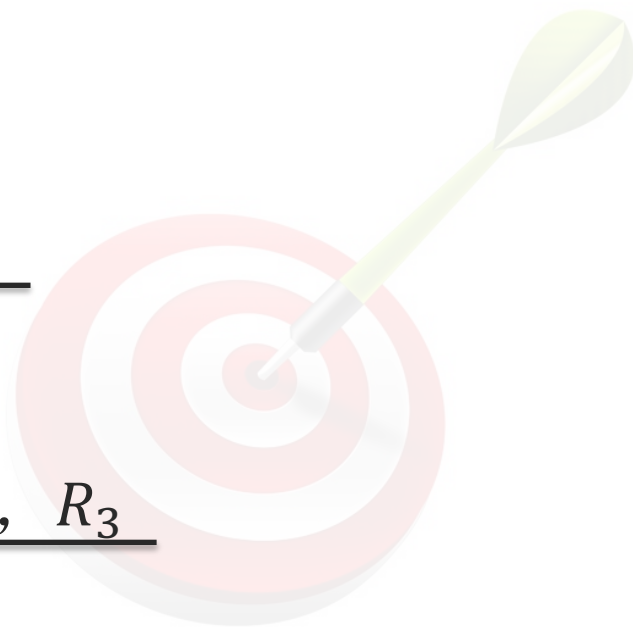
The matrix is displayed over a background of a directed graph with 8 nodes labeled 1 through 8, arranged in a circular pattern. The matrix is associated with the set $A = \{a, b, c\}$.



练习



- 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R_0 = \emptyset$, $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d)\}$, $R_2 = \{(c, d)\}$, $R_3 = \{(a, c), (c, d)\}$, 那么:
- 满足自反关系的是 R_1
 - 满足反自反关系的是 R_0, R_2, R_3
 - 满足对称关系的是 R_0
 - 满足反对称关系的是 R_0, R_1, R_2, R_3
 - 满足传递关系的是 R_0, R_1, R_2





一些常用关系的性质



	$=$	\leq	$<$	$ $	\equiv_3	\emptyset	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓



关系性质的“模型”表现



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中1所在位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则从 x_i 到 x_k 也有边



关系性质的矩阵特征*



设 R 为 A 上关系, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $M_R = (m_{ij})$ 为 R 的关系矩阵。

$$(1) R \text{ 自反} \Leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^n m_{ii} \right) = 1$$

$$(2) R \text{ 反自反} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n m_{ii} \right) = 0$$

$$(3) R \text{ 对称} \Leftrightarrow M_R = M_R^T$$

$$(4) R \text{ 反对称} \Leftrightarrow (\forall i, j \leq n)(i \neq j \rightarrow m_{ij} \times m_{ji} = 0)$$

$$(5) R \text{ 传递} \Leftrightarrow M_R \odot M_R \leq M_R$$

(6) 若 $M_R \odot M_R = M_R$, 则 R 传递, 反之不然。

$$(\text{反例: } M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 传递, 但 } M_R \odot M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq M_R)$$



等价关系



- **定义（等价关系）**：设 A 为集合， R 为 A 上的关系，若 R 自反、对称且传递，称 R 为 A 上的**等价关系**（equivalence relation）。这时把 xRy 记为 $x \sim_R y$ 或简记为 $x \sim y$
- 一个著名的等价关系是：**整数集 \mathbb{Z} 上关于模 n 的同余关系**



等价关系 (续)



■ 证明：整数集 \mathbb{Z} 上关于模 n 的同余关系为等价关系

证明：设 $n \in \mathbb{N}^+$, 定义 \sim 如下：

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y$ 定义为 $x \equiv y \pmod{n}$ (i.e. $n \mid (x - y)$)

欲证 \sim 为等价关系，只需证：

(1) $x \sim x$ 即 $x \equiv x \pmod{n}$

(2) $x \sim y \sim z \rightarrow x \sim z$ 即 $x \equiv y \pmod{n} \wedge y \equiv z \pmod{n} \rightarrow x \equiv z \pmod{n}$

(3) $x \sim y \rightarrow y \sim x$ 即 $x \equiv y \pmod{n} \rightarrow y \equiv x \pmod{n}$

而以上三点易见，故得证。





等价类

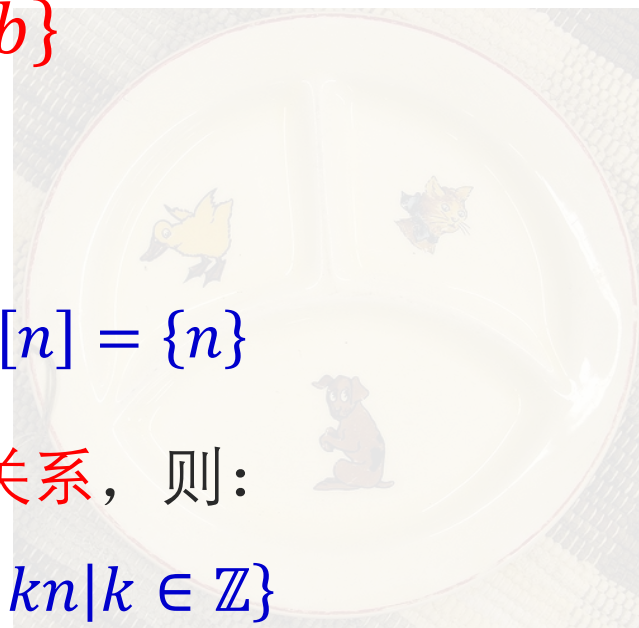


- **定义（等价类）**：令 R 为 A 上的等价关系，对任意 $a \in A$ ， a 关于 R 的**等价类**（equivalence class） $[a]_R$ ：

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid aRb\}$$

简记为 $[a]$ （或 $R[\{a\}]$ ， $R(a)$ ）

- **例1**：若 R 为 \mathbb{Z} 上的**相等关系**，则： $[n] = \{n\}$
- **例2**：若 R 为 \mathbb{Z} 上的关于模 n 的**同余关系**，则：
$$[x] = \{y \mid x \equiv y \pmod{n}\} = \{x + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$$





等价类 (续)

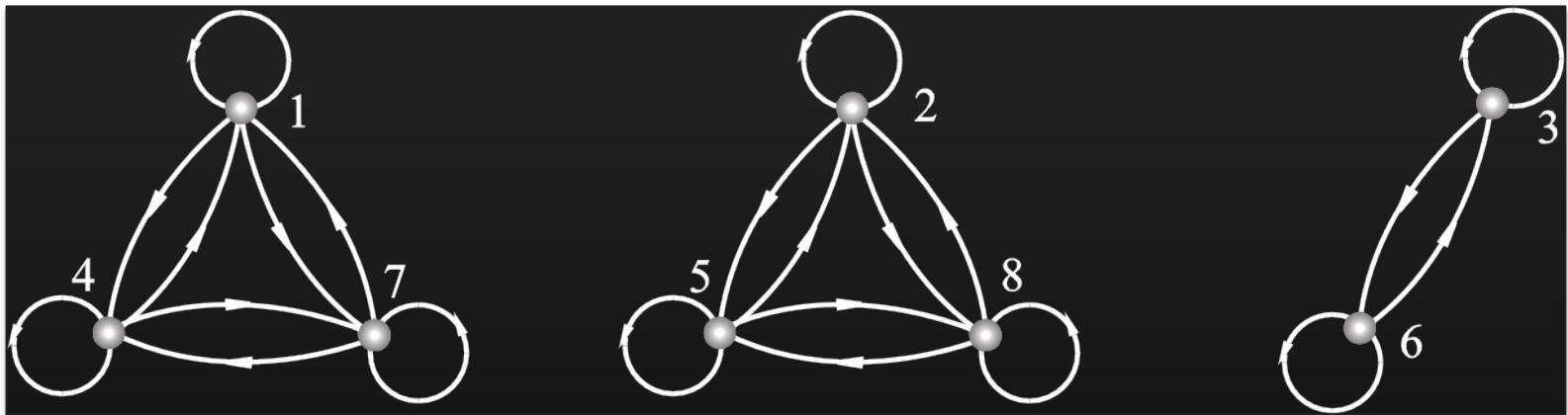


$A = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$





等价类的代表元素



- 对于等价类 $[a]_R = \{b \in A | aRb\}$, a 称为这个等价类的代表元素

- 其实, 该等价类的每个元素都可以做代表元素:

$$(\forall a \in A)(aRb \rightarrow [a] = [b])$$

- **证明:** 由于 aRb , 对任意 $t \in A$, 若 $t \in [a]$, 则 aRt , 根据 R 的对称性与传递性, 可得 bRt ; 因此 $t \in [b]$, 故 $[a] \subseteq [b]$; 同理可证得 $[b] \subseteq [a]$. □



等价类的性质



■ **定理：** 设 \sim 为 A 上的等价关系

$$(1) (\forall x \in A)(x \in [x])$$

$$(2) (\forall x, y \in A)(x \sim y \leftrightarrow [x] = [y])$$

$$(3) (\forall x, y \in A)(\neg(x \sim y) \leftrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset)$$

$$(4) (\forall x, y \in A)([x] = [y] \text{ 与 } [x] \cap [y] = \emptyset \text{ 恰具其一})$$

$$(5) \cup\{[x] \mid x \in A\} = A$$

证明： (1) $\because x \in A \rightarrow x \sim x \rightarrow x \in [x]$

$$\therefore (\forall x \in A)(x \in [x])$$



等价类的性质 (续)



(2) 设 $x, y \in A \wedge x \sim y$

$$\because z \in [x] \rightarrow x \sim z \rightarrow z \sim x \rightarrow z \sim y \rightarrow y \sim z \rightarrow z \in [y]$$

$$\therefore [x] \subseteq [y]$$

同理 $[y] \subseteq [x]$

$$(5) \cup\{[x] \mid x \in A\} = A$$

$$x \sim y \rightarrow [x] = [y]$$

$$\text{又 } [x] = [y] \rightarrow x \in [y] \rightarrow y \sim x \rightarrow x \sim y$$

(3) 只需证 $[x] \cap [y] \neq \emptyset \leftrightarrow x \sim y$

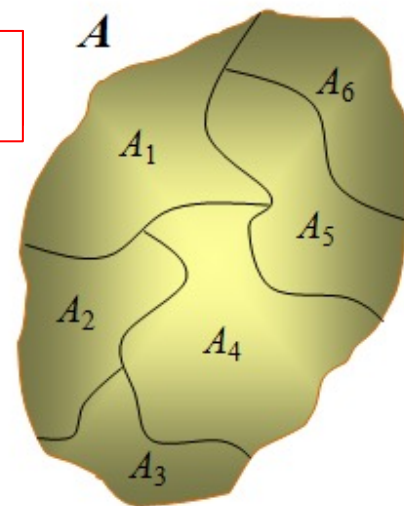
$$\text{由(1)(2)得 } x \sim y \rightarrow [x] \cap [y] = [x] \neq \emptyset$$

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \rightarrow \exists(z \in [x] \cap [y]) \rightarrow \exists z(x \sim z \wedge y \sim z) \rightarrow \exists z(x \sim z \wedge z \sim y) \rightarrow$$

$$x \sim y$$

(4) 由(2)(3)即得。

(5) 由 $x \in [x]$ 即得。□





- **定义（商集）**：设 R 为非空集合 A 上的**等价关系**，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**（quotient set），记为 A/R ：

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ ， A 关于模 3 等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为：

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{8\}\}$$

$$A/E_A = \{\{1, 2, \dots, 8\}\}$$



商集与集合的划分



- **定义：** 设 A 为非空集合，若 A 的子集族 Π ($\Pi \subseteq P(A)$ ，即 Π 为 A 的某些子集构成的集合)满足以下条件：

- (1) $\emptyset \notin \Pi$
- (2) $(\forall X, Y \in \Pi)(X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset)$
- (3) $\bigcup \Pi = A$

则称 Π 是 A 的一个**划分** (partition)，称 Π 中的元素为 A 的**划分块** (block)

- 非空集合 A 的**每一个商集**都对应 A 的一个**划分**

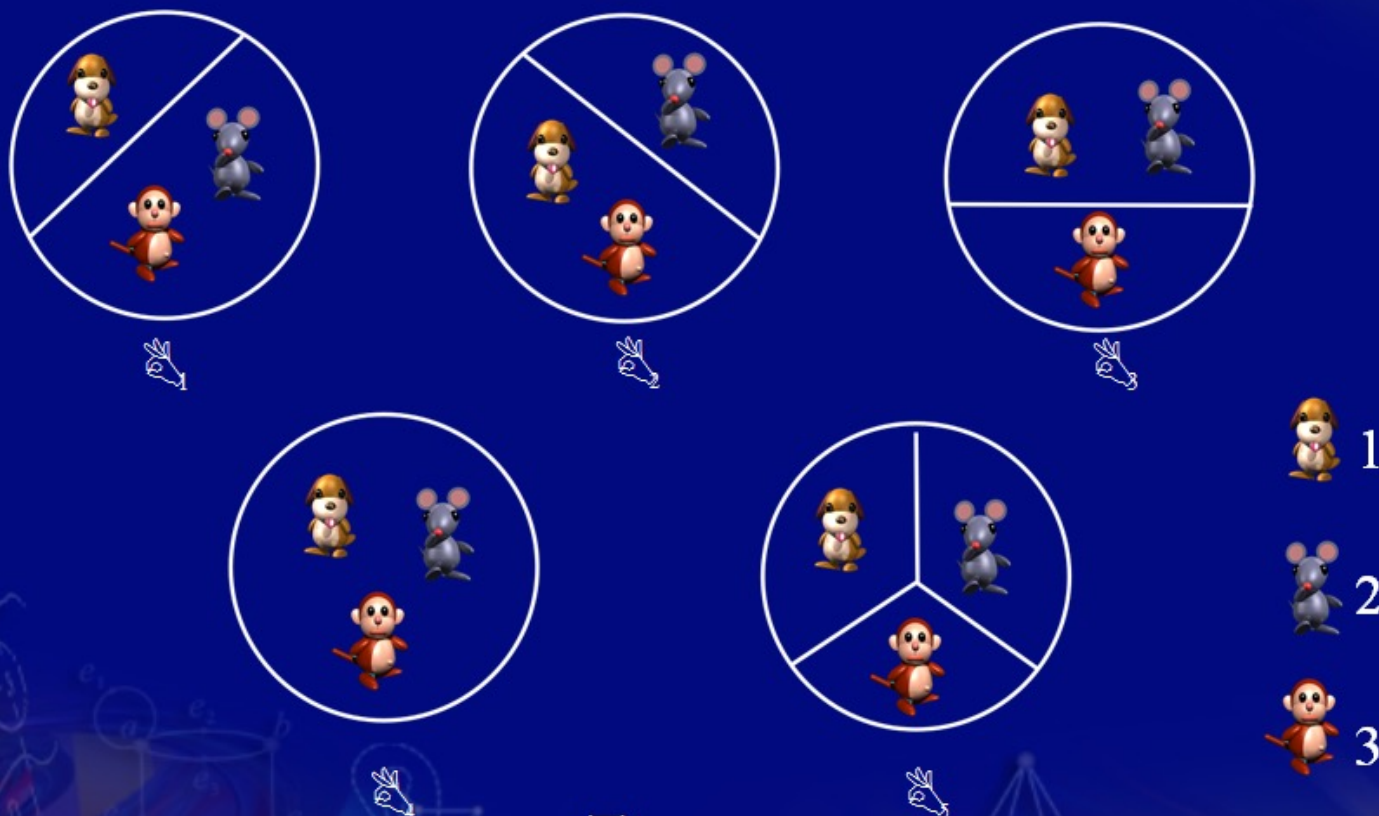


商集与集合的划分 (续)



例 给出 $A = \{1, 2, 3\}$ 上所有的等价关系

解 如下图, 先做出 A 的所有划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



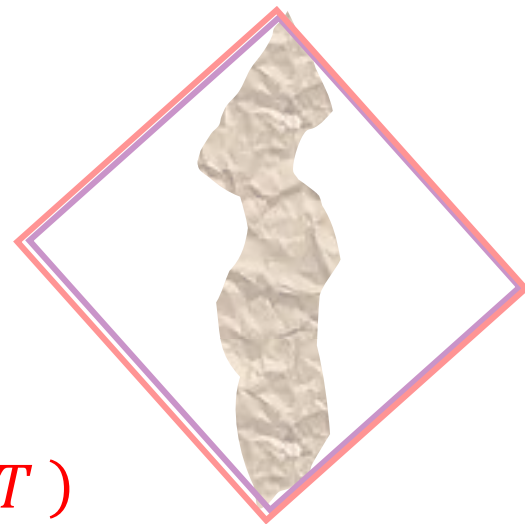


关系的闭包 (closure)



- **定义 (关系的闭包)** : 设 R 为集合 A 上的关系, P 为某个性质 (即自反性, 对称性, 传递性之一), 若存在 $S \subseteq A \times A$, 使得:

- (1) $R \subseteq S$
- (2) S 具有性质 P
- (3) $\forall T (R \subseteq T \wedge T \text{ 具有性质 } P \rightarrow S \subseteq T)$



则称 S 为“相对于 P 的 R 的闭包 (简称 R 的 P 闭包)”



闭包的存在性



■ 定理： R 的 P 闭包存在且唯一

证明： (1) **唯一性：** 设 R_1, R_2 为 R 的 P 闭包，由闭包定义，有 $R_1 \subseteq R_2 \wedge R_2 \subseteq R_1$ ，从而 $R_1 = R_2$

(2) **存在性：** 设 $R \subseteq A \times A$ ，令 $\bar{R} = \bigcap \{X \mid R \subseteq X \wedge X \text{ 具有性质 } P\}$ ，由于 $A \times A \in \{X \mid R \subseteq X \wedge X \text{ 具有性质 } P\}$ ，故 \bar{R} 有定义。在上述闭包的定义中，易见 \bar{R} 满足性质(1)、(3)，以下证明性质(2)，即 \bar{R} 具有性质 P ：

✓ **Case 1:** P 为自反性，

若 $\forall X((x, x) \in X)$ ，则 $(x, x) \in \bar{R}$ ，从而 \bar{R} 自反；

✓ **Case 2, Case 3:** P 为对称性或传递性，同理可证。 □



关系闭包的构造



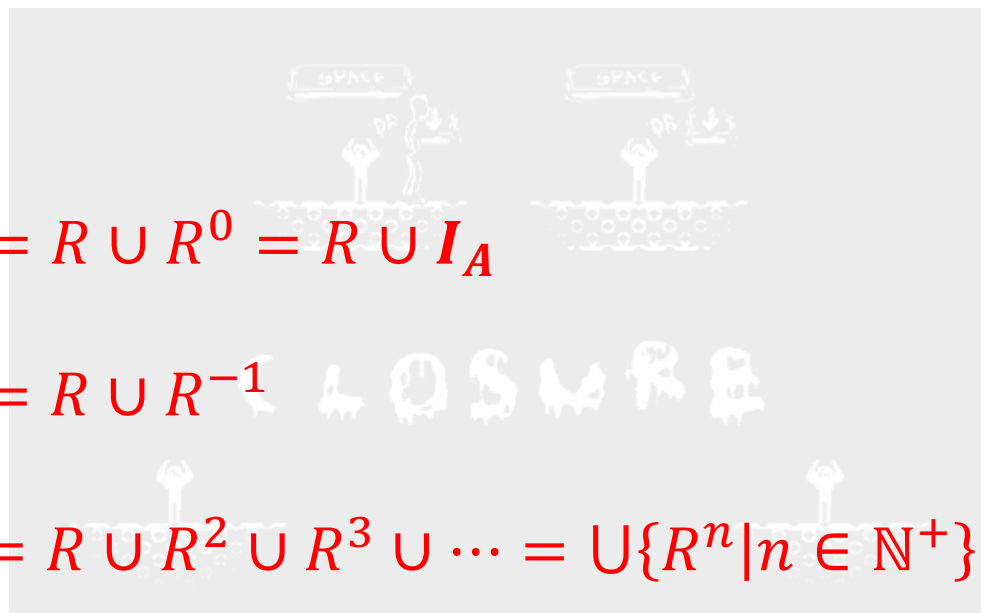
- 上面已经证明 R 的 P 闭包存在，但上述定理中的做法并不实用，以下给出闭包的实用构造：

- 设 $R \subseteq A \times A$,

- (1) R 的自反闭包 $r(R) = R \cup R^0 = R \cup I_A$

- (2) R 的对称闭包 $s(R) = R \cup R^{-1}$

- (3) R 的传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup \{R^n | n \in \mathbb{N}^+\}$





关系闭包的构造 (续)



■ (1) $r(R) = R \cup R^0 = R \cup I_A$

证

(1) 由 $I_A = R^0 \subseteq R \cup R^0$ 可知 $R \cup R^0$ 是自反的, 且满足 $R \subseteq R \cup R^0$
设 R'' 是 A 上包含 R 的自反关系, 则有 $R \subseteq R''$ 和 $I_A \subseteq R''$.
从而 $R \cup R^0 \subseteq R''$
综上所述 $R \cup R^0$ 满足闭包定义的三个条件, 所以
 $r(R) = R \cup R^0$. \square



关系闭包的构造 (续)



■ (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

■ 证明:

○ 显然 $R \subseteq R \cup R^{-1}$

○ (证明 $R \cup R^{-1}$ 具有对称性) $\forall (x, y) \in R \cup R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R \vee (x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \vee (y, x) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R \cup R^{-1}$

○ (证明 $R \cup R^{-1}$ 具有极小性) 假设 R' 为对称关系且 $R \subseteq R'$, 则: $\forall (x, y) \in R \cup R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R \vee (x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \Rightarrow (x, y) \in R' \vee (y, x) \in R' \Leftrightarrow (x, y) \in R' \vee (x, y) \in R' \Leftrightarrow (x, y) \in R'$, 故 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$

○ 根据对称闭包的定义, 有 $s(R) = R \cup R^{-1}$. \square



关系闭包的构造 (续)



■ (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup \{R^n | n \in \mathbb{N}^+\}$

(3) 先证 $R \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R)$ 成立.

方法: 用归纳法证明对任意正整数 n 有 $R^n \subseteq t(R)$

$n=1$ 时有 $R^1=R \subseteq t(R)$.

假设 $R^n \subseteq t(R)$ 成立, 那么对任意的 $\langle x, y \rangle$ 有

$$\langle x, y \rangle \in R^{n+1} = R \circ R^n$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R^n \wedge \langle t, y \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in t(R) \wedge \langle t, y \rangle \in t(R))$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in t(R) \quad (\text{因为 } t(R) \text{ 是传递的})$$

这就证明了 $R^{n+1} \subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.



关系闭包的构造 (续)



■ (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup \{R^n | n \in \mathbb{N}^+\}$

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \dots$ 成立, 为此只须证明 $R \cup R^2 \cup \dots$ 是传递的.
任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$, 则

$$\langle x, y \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots \wedge \langle y, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots$$

$$\Rightarrow \exists t (\langle x, y \rangle \in R^t) \wedge \exists s (\langle y, z \rangle \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s (\langle x, z \rangle \in R^s \circ R^t)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists s (\langle x, z \rangle \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \cup R^2 \cup \dots$$

从而证明了 $R \cup R^2 \cup \dots$ 是传递的.

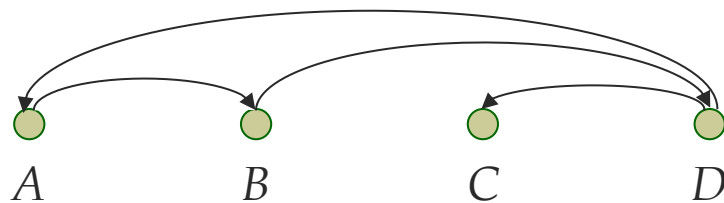


传递闭包的“模型表象”

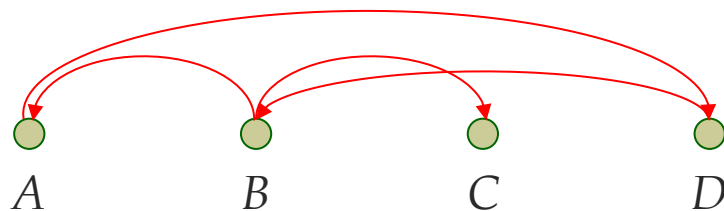


■ $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup \{R^n | n \in \mathbb{N}^+\}$

➤ 例:



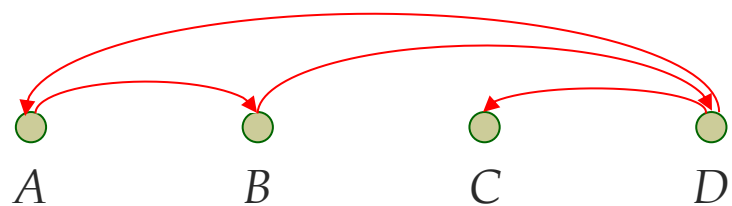
$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M_R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$M_R^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_R$$



关系闭包的构造 (续)



例 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$,
 R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下图所示.



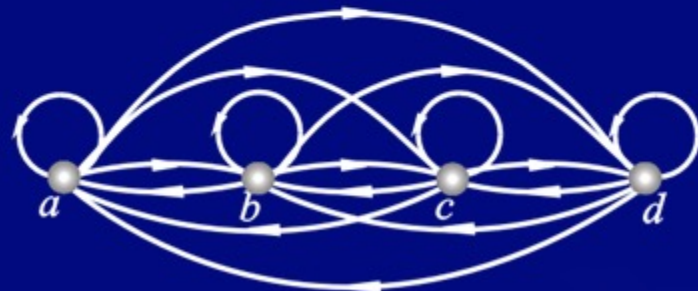
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$



关系闭包的构造 (续)



- **命题:** 设 $R \subseteq A \times A$, 且 $|A| = n$, 令 $\bar{R} = \bigcup \{R^i \mid i \leq n\}$, 则 $(\forall m > n)(R^m \subseteq \bar{R})$
- **证明:** 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $R \subseteq A \times A$, $m > n$, 任取 $(a, b) \in R^m$, 由 aR^mb , 故 $\exists x_0, x_1, \dots, x_m \in A$, 使 $a = x_0$, $b = x_m$ 且 $x_0Rx_1Rx_2 \cdots Rx_m$, $\because \{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subseteq A$, $\therefore |\{x_0, x_1, \dots, x_m\}| \leq n$; 由鸽笼原理, 必存在 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ 使 $x_0Rx_{i_1}Rx_{i_2}R \cdots Rx_{i_k}Rx_m$ 且 $k < n$, 从而 $(a, b) \in R^{k+1} \subseteq \bar{R}$, 故 $a\bar{R}b$. \square
- **推论:** 若 $|A| = n$, 则 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$



关系闭包的性质



设 $R \subseteq A \times A$, $R_1 \subseteq A \times A$, $R_2 \subseteq A \times A$, 则

$$(1) R \text{ 自反} \Leftrightarrow r(R) = R$$

$$(2) R \text{ 对称} \Leftrightarrow s(R) = R$$

$$(3) R \text{ 传递} \Leftrightarrow t(R) = R$$

$$(4) R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow p(R_1) \subseteq p(R_2), \text{ 这里 } p \in \{r, s, t\}$$

$$\begin{cases} (5) & \left(\begin{array}{c} \text{自反} \\ \text{对称} \\ \text{传递} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} s(R), t(R) \text{ 自反} \\ r(R), t(R) \text{ 对称} \\ r(R) \text{ 传递} (s(R) \text{ 不一定传递, 如 } R = \{\langle 1, 2 \rangle\}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8) r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2) \\ (9) s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2) \\ (10) t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2) \end{cases} \quad \begin{cases} (11) rs(R) = sr(R) \\ (12) tr(R) = rt(R) \\ (13) ts(R) \supseteq st(R) \end{cases}$$



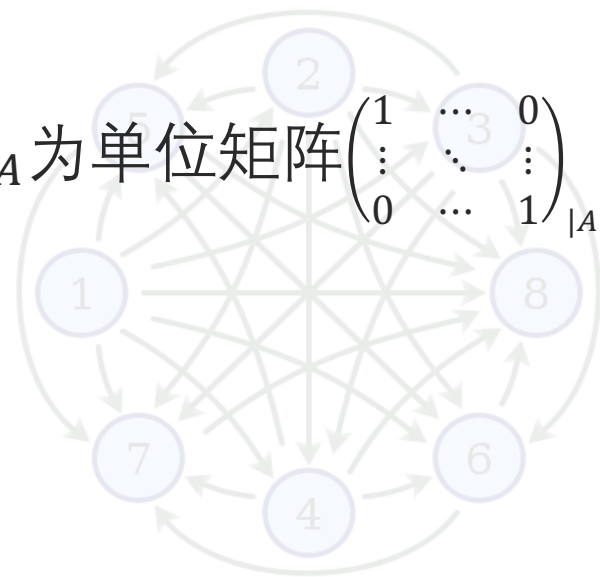


闭包的关系矩阵表示



■ **定理：** 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, M_R 为 R 的关系矩阵 (\vee 和 \odot 分别为关系矩阵的布尔和和布尔积运算):

- (1) $M_{r(R)} = M_R \vee M_{I_A} = M_R \vee I_A$ (I_A 为单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{|A|}$)
- (2) $M_{s(R)} = M_R \vee M_R^T$
- (3) $M_{t(R)} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee \cdots \vee M_R^{[n]}$



$$\text{这里 } M_R^{[k]} = \overbrace{M_R \odot M_R \odot \cdots \odot M_R}^k$$



用矩阵乘法计算传递闭包



$$M_{t(R)} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee \dots \vee M_R^{[n]},$$

这里 $M_R^{[k]} = \overbrace{M_R \odot M_R \odot \dots \odot M_R}^k$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix}$$

算法Tranclosure

$A := M_R$

$B := A$

For i:=2 to n

Begin

$A := A \odot M_R$

$B := B \vee A$

End.(B为 M_{R^*})

$n \times n$ 矩阵相乘，结果中每一项，要做 $2n - 1$ 次布尔运算(积与和)，总共需要计算 n^2 项。

$n \times n$ 矩阵相加，要做 n^2 做次布尔和运算

本算法共进行 $n - 1$ 次矩阵乘加运算。

总运算量 $n^2(2n - 1)(n - 1) + n^2(n - 1) = 2n^3(n - 1)$ ，因此算法Tranclosure $\in O(n^4)$



用矩阵乘法计算传递闭包 (续)



$$M_{t(R)} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee \dots \vee M_R^{[n]},$$

$$\text{这里 } M_R^{[k]} = \overbrace{M_R \odot M_R \odot \dots \odot M_R}^k$$

算法 Transclosure

$A := M_R$

$B := A$

For i:=2 to n

Begin

$A := A \odot M_R$

$B := B \vee A$

End. (B 为 M_{R^*})

Timeline of matrix multiplication exponent

Year	Bound on omega	Authors
1969	2.8074	Strassen ^[1]
1978	2.796	Pan ^[11]
1979	2.780	Bini, Capovani [it], Romani ^[12]
1981	2.522	Schönhage ^[13]
1981	2.517	Romani ^[14]
1981	2.496	Coppersmith, Winograd ^[15]
1986	2.479	Strassen ^[16]
1990	2.3755	Coppersmith, Winograd ^[17]
2010	2.3737	Stothers ^[18]
2013	2.3729	Williams ^{[19][20]}
2014	2.3728639	Le Gall ^[21]
2020	2.3728596	Alman, Williams ^{[6][22]}
2022	2.371866	Duan, Wu, Zhou ^[3]
2023	2.371552	Williams, Xu, Xu, and Zhou ^[2]



求传递闭包的Warshall算法



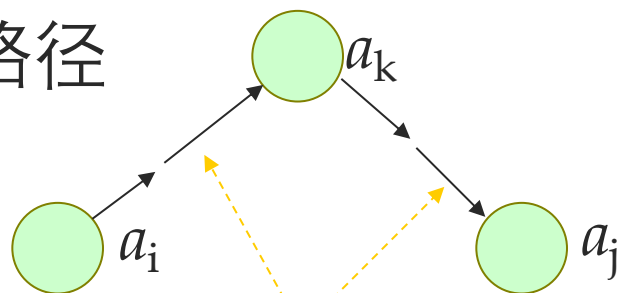
- 1962年，Stephen Warshall提出一种计算二元关系传递闭包的高效算法，算法采用动态规划（dynamic programming）的思想，将问题求解的阶段进行划分
- Warshall算法通过关系图模型更容易理解：要确定传递闭包的关系矩阵中的每一项，对应于确定关系图中任意两顶点之间是否存在路径，这实际上就是把传递闭包运算转换为关系图中找路径的运算



求传递闭包的Warshall算法（续）



- Warshall算法高效的根源在于可以直接利用上一步计算结果中的有效信息简化当前步的计算过程
- 如图，上一轮计算已经产生了 $a_i \rightarrow a_k$ 以及 $a_k \rightarrow a_j$ 的路径，当新一轮计算加入 a_k 点作为中间点时，立即可知道存在 $a_i \rightarrow a_k \rightarrow a_j$ 的路径



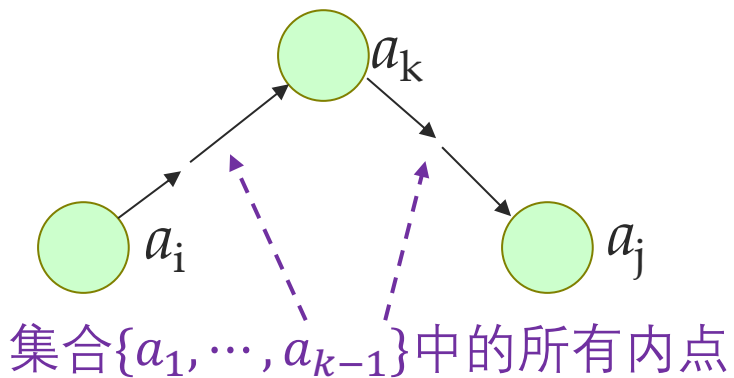
中间点，在集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ 中



求传递闭包的Warshall算法 (续)



- Warshall算法的核心思想是避免直接计算原始关系矩阵 M_R (记为 $R^{(0)}$)的高次幂，而采用通过第 $i-1$ 轮的关系矩阵 $R^{(i-1)}$ 中的有效信息计算 $R^{(i)}$ 的方式迭代地找出当前轮次中由传递关系产生的新的序偶



$R^{(k)}[i, j] = 1$ 当且仅当:

- $R^{(k-1)}[i, j] = 1$ 或
- $R^{(k-1)}[i, k] = 1$ 且 $R^{(k-1)}[k, j] = 1$



Warshall算法的过程



- $R^{(0)}$ 是原关系的关系矩阵
- $R^{(1)}$ 包含可以用第一个顶点作为中间点的路径信息
- \vdots
- $R^{(n)}$ 即为所有的顶点作为中间点寻找有向路径，所以 $R^{(n)}$ 就是待求的传递闭包
- Warshall算法的正确性就来源于通过 $R^{(k-1)}$ 来计算 $R^{(k)}$ ，最终获得所有顶点之间潜在的可达性，即在每一轮迭代循环中关系图中所有顶点对的可达性保持循环不变^{*}

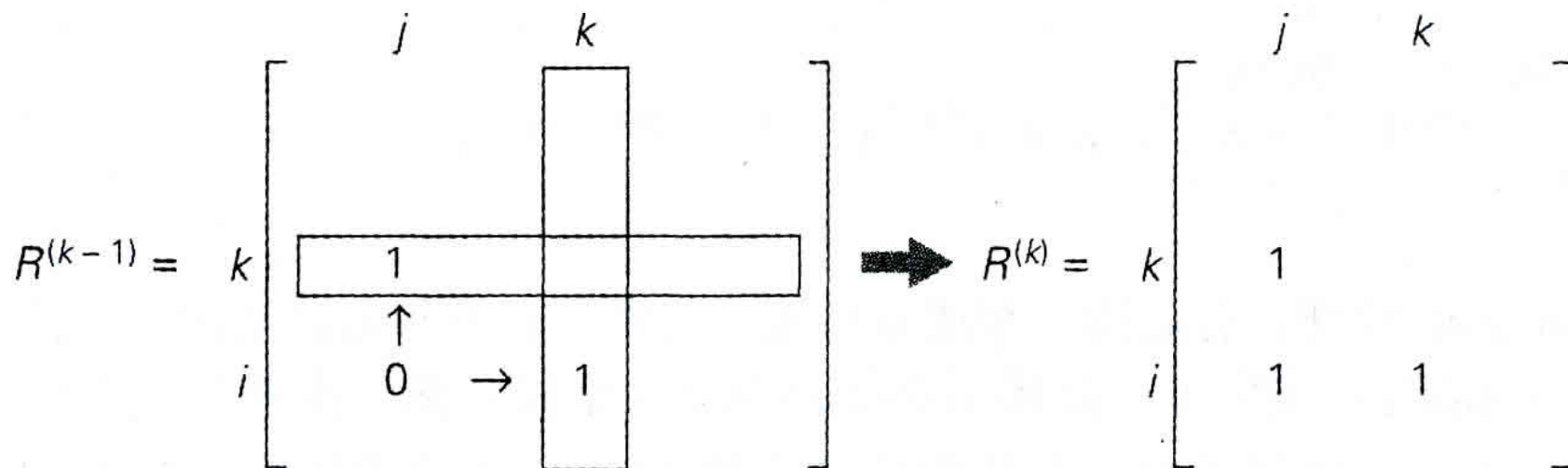


Warshall算法的过程 (续)



- 递推关系式 (状态转移方程) :

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} \vee (R_{ik}^{(k-1)} \wedge R_{kj}^{(k-1)})$$



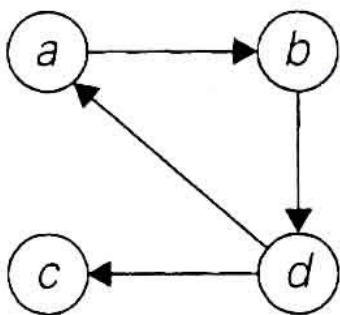


Warshall算法的过程 (续)



■ 算法实例：

- (a)为关系图，(b)为关系矩阵 A ，(c)为 $t(A)$ 的关系矩阵 T



(a)

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(b)

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(c)



Warshall算法的过程 (续)



$$R^{(0)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

该矩阵反映了不包含中间顶点的路径，框起来的行和列用来计算 $R^{(1)}$

$$R^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

该矩阵反映了包含编号不大于1的中间顶点（也就是 a ）的路径（有一条从 d 到 b 的新路径）框起来的行和列用来计算 $R^{(2)}$

$$R^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

包含编号不大于2的中间顶点（也就是 a, b ）

$$R^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

包含编号不大于3的中间顶点 a, b, c 的路径，没有新路径

$$R^{(4)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

包含编号不大于4的中间顶点 (a, b, c, d) 的路径。有五条新路径



Warshall算法的过程 (续)



ALGORITHM WARSHALL

1. $CLOSURE \leftarrow M_R$

2. FOR $k := 1$ TO n

FOR $i := 1$ TO n

FOR $j := 1$ TO n

$CLOSURE[i, j] \leftarrow \underline{CLOSURE[i, j]}$

$\vee (\underline{CLOSURE[i, k] \wedge CLOSURE[k, j]})$

3. $M_{t(R)} \leftarrow CLOSURE$

END.

这个语句在三重循环内，
执行 n^3 次，每次执行2个
布尔运算（和与积）

总运算量: $2n^3$



因此算法Warshall $\in O(n^3)$



本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 9.1.4、9.3–9.5 节
- 课后习题：
 - Problem Set 15
- 提交时间：4月15日 10:00 前





集合划分的计数*

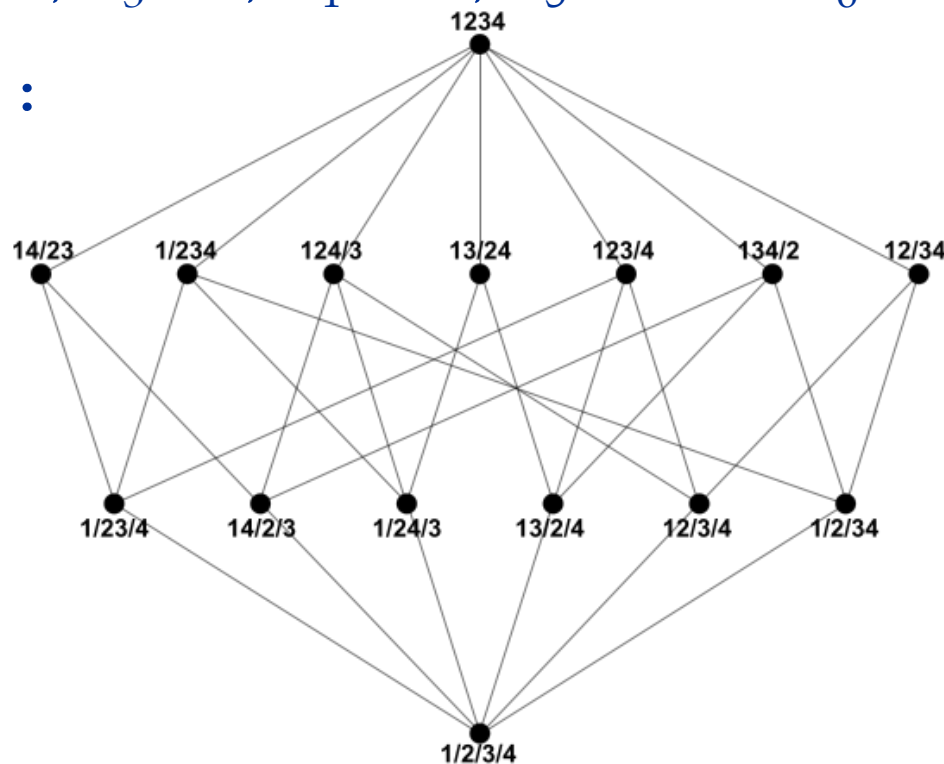


n 元集合的划分总数称为“贝尔数 (Bell number)”。前7个贝尔数分别为： $B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52$ 和 $B_6 = 203$ 。贝尔数可由以下递归式给出：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

贝尔数具有一个指数生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = e^{e^z - 1}$$





关系矩阵的运算*



设 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 为 $m \times n$ 阶 0-1 矩阵, 我们定义 $A \vee B = C = [c_{ij}]$ (A 与 B 之并) 如下:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1 \\ 0, & \text{若 } a_{ij} = 0 \wedge b_{ij} = 0 \end{cases}$$

$A \wedge B = D = [d_{ij}]$ (A 与 B 之交) 如下:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0, & \text{若 } a_{ij} = 0 \vee b_{ij} = 0 \end{cases}$$

设 $A = [a_{ij}]$ 为 $m \times p$ 阶, $B = [b_{ij}]$ 为 $p \times n$ 阶 0-1 矩阵, $A \odot B$ (A 与 B 之 Boole 积) $= C = [c_{ij}]$ 如下:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \exists k (1 \leq k \leq p \wedge a_{ik} = b_{kj} = 1) \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$



关系矩阵的运算* (续)



设 $R, R_1, R_2 \subseteq A \times B$ 为 A 到 B 的二元关系, $S \subseteq B \times C$, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, M_R 为 R 之表示矩阵, $C = \{c_1, \dots, c_l\}$

$$1. M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$2. M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

$$3. M_{A \times B - R} = [1]_{m \times n} - M_R$$

$$4. M_{R^{-1}} = (M_R)^T$$

$$5. M_{R \circ S} = M_S \odot M_R \quad (\text{注: 有教材中定义为 } M_{R \circ S} = M_R \odot M_S, \text{ 两者皆可})$$