

# 离散数学

## Discrete Mathematics

### 第十六讲：偏序与偏序格

吴楠

南京大学计算机科学与技术系



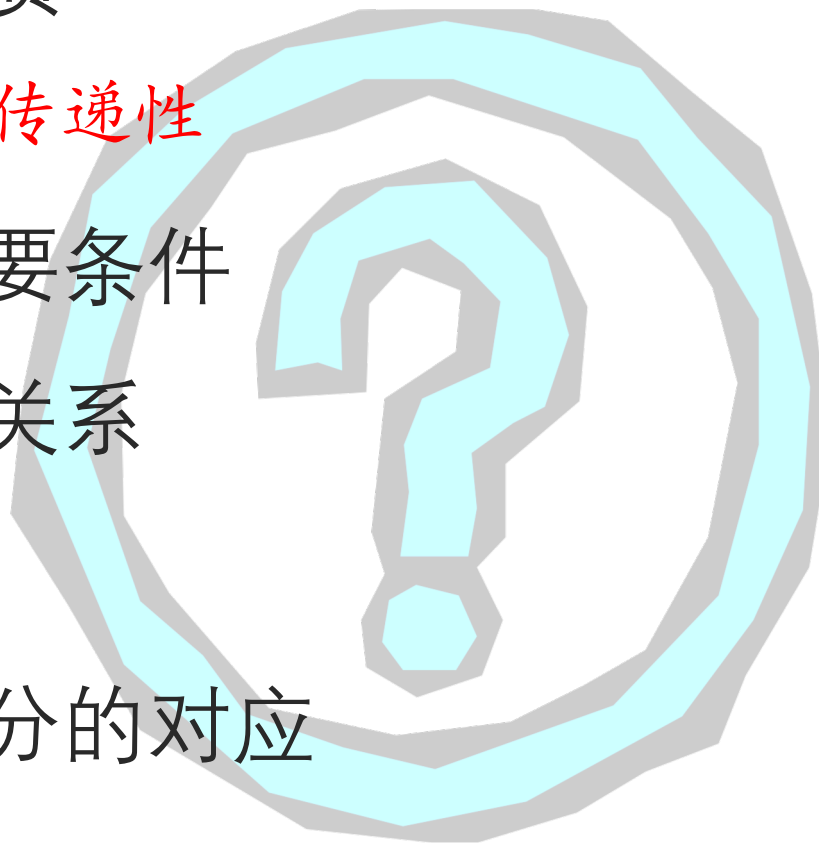
2025 年 4 月 15 日



# 前情提要



- 关系的几类重要性质
  - 自反性、对称性、传递性
- 性质满足的充分必要条件
- 性质与运算之间的关系
- 等价关系
- 等价关系与集合划分的对应
- 关系的闭包

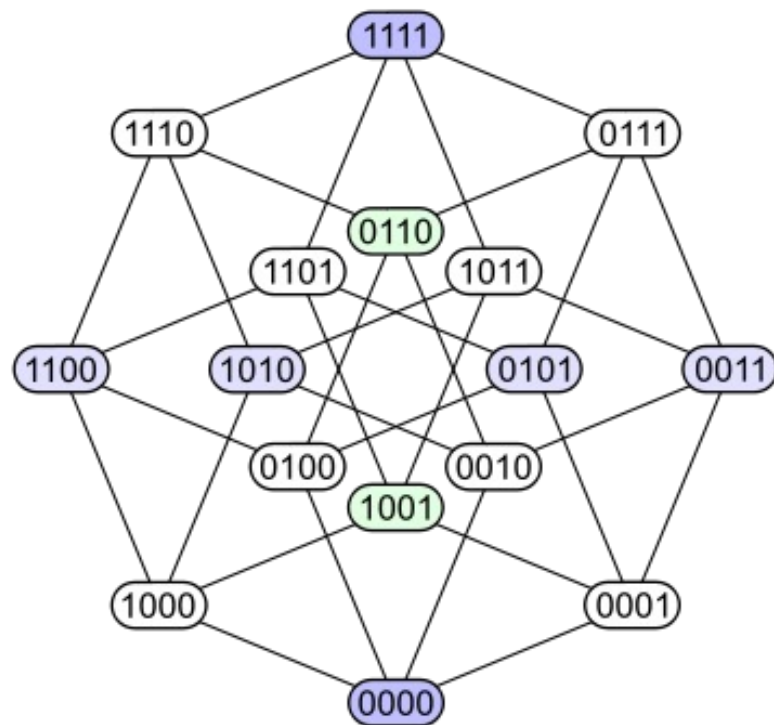




# 本讲主要内容



- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素
- 特殊元素的性质
- 偏序格





# 偏序关系 (partially ordered relation)



- 定义 (偏序关系) : 非空集合  $A$  上的自反、反对称和传递的关系称为  $A$  上的偏序关系, 记为:  $\leq$
- 设  $\leq$  为偏序关系, 若  $(a, b) \in \leq$ , 则记为  $a \leq b$ , 读作 “ $a$  小于或等于  $b$ ”

## 实例

集合  $A$  上的恒等关系  $I_A$  是  $A$  上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.



# 偏序关系 (续)



定义： 设  $R$  为非空集合  $A$  上的偏序关系，

$$x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 可比} \Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x.$$

任取两个元素  $x$  和  $y$ ，可能有下述几种情况发生：

$$x < y (\text{或 } y < x), \quad x = y, \quad x \text{ 与 } y \text{ 不是可比的}.$$

定义：  $R$  为非空集合  $A$  上的偏序关系，

$\forall x, y \in A, x$  与  $y$  都是可比的，则称  $R$  为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义：  $x, y \in A$ ，如果  $x < y$  且不存在  $z \in A$  使得  $x < z < y$ ，则称  $y$  覆盖  $x$ 。

例如  $\{1, 2, 4, 6\}$  集合上的整除关系，2 覆盖 1，4 和 6 覆盖 2。但 4 不覆盖 1。



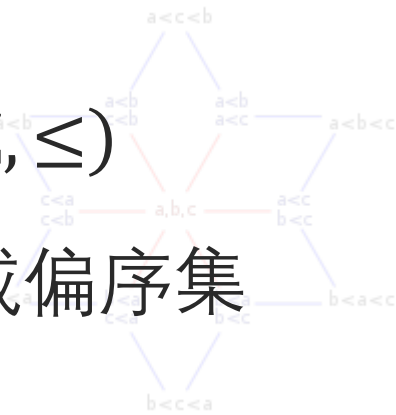
# 偏序集



- **定义（偏序集）**：集合 $A$ 和 $A$ 上的偏序关系 $\leq$ 一起称为偏序集（partially ordered set, poset），记作 $(A, \leq)$

- **例：**

- 整数集 $\mathbb{Z}$ 同小于等于关系构成偏序集 $(\mathbb{Z}, \leq)$
- 集合 $A$ 之幂集 $\mathcal{P}(A)$ 同集合包含关系构成偏序集 $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$





# 偏序集 (续)



**例：**证明 $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ 为全序当且仅当 $|A| \leq 1$

证明：(1) “ $\Leftarrow$ ”：

Case 1:  $|A| = 0$ ,  $P(A) = \{\emptyset\}$ ,  $(P(A), \subseteq)$ 为全序

Case 2:  $|A| = 1$ , 设 $A = \{a\}$ ,  $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ ,  $(P(A), \subseteq)$ 为全序

“ $\Rightarrow$ ”：只需证 $|A| \geq 2$ 时,  $(P(A), \subseteq)$ 非全序

$\because |A| \geq 2 \quad \therefore$ 可取 $a, b \in A, a \neq b$

$\because \{a\} \not\subseteq \{b\} \quad \therefore (P(A), \subseteq)$ 非全序



# 偏序集 (续)



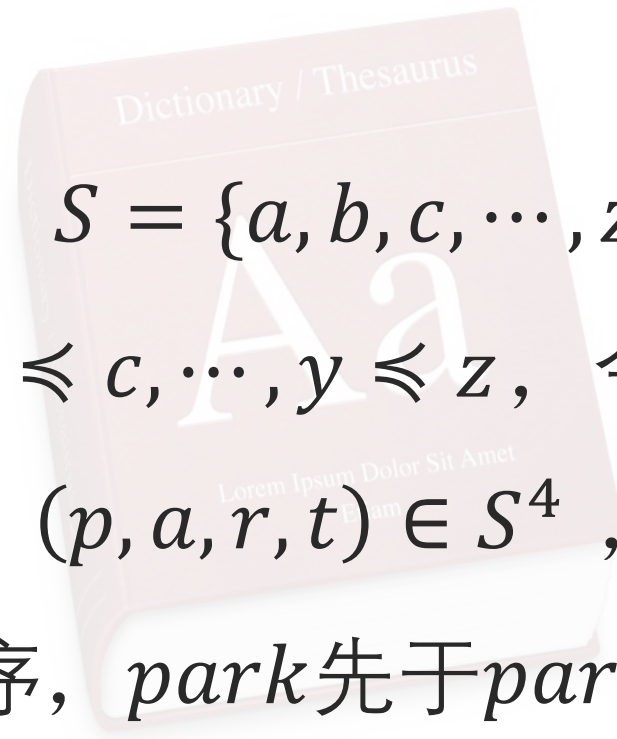
- 例：字典序 (lexicographic order) 与偏序集
- 设字母表为  $\Sigma$ ，给定偏序集  $(\Sigma, \leq_{\Sigma})$ ，其中偏序关系  $\leq_{\Sigma}$  为字母表上的顺序，在  $\Sigma \times \Sigma$  上定义新关系 “ $\preceq$ ”： $(a, b) \preceq (a', b') \iff$  在  $\Sigma$  中有  $a <_{\Sigma} a'$  或者有  $a = a'$  且  $b \leq_{\Sigma} b'$
- 易证  $\preceq$  为  $\Sigma \times \Sigma$  上的偏序关系；上述构造为两个字母组成单词的情况，可扩展到其它情况



# 偏序集 (续)



- 例：在字典中 “*part*” 和 “*park*” 两个单词的顺序如何？
- 定义全序集（小写字母表）  $S = \{a, b, c, \dots, z\}$ ，元素满足线序关系  $a \leq b, b \leq c, \dots, y \leq z$ ，令  $S^4 = S \times S \times S \times S$ ，易见， $(p, a, r, t) \in S^4$ ， $(p, a, r, k) \in S^4$ ；根据字典序，*park* 先于 *part*

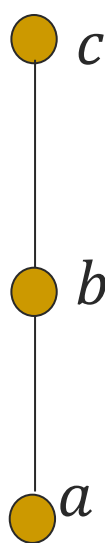
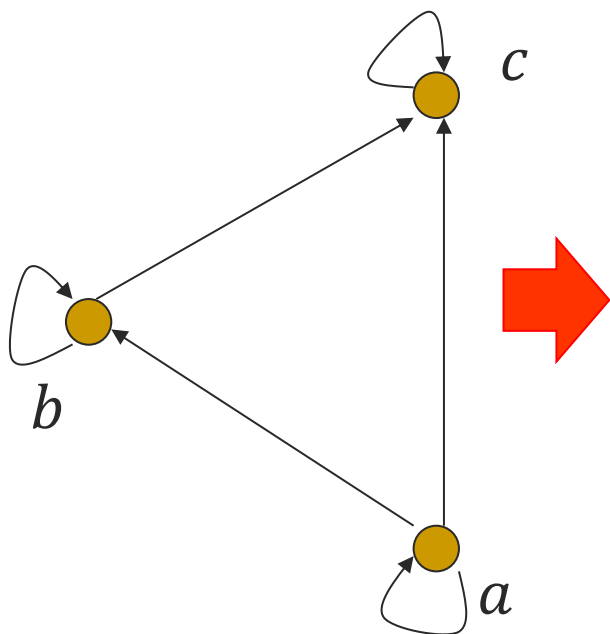




# 哈斯图 (Hasse diagrams)



将偏序关系简化为哈斯图：



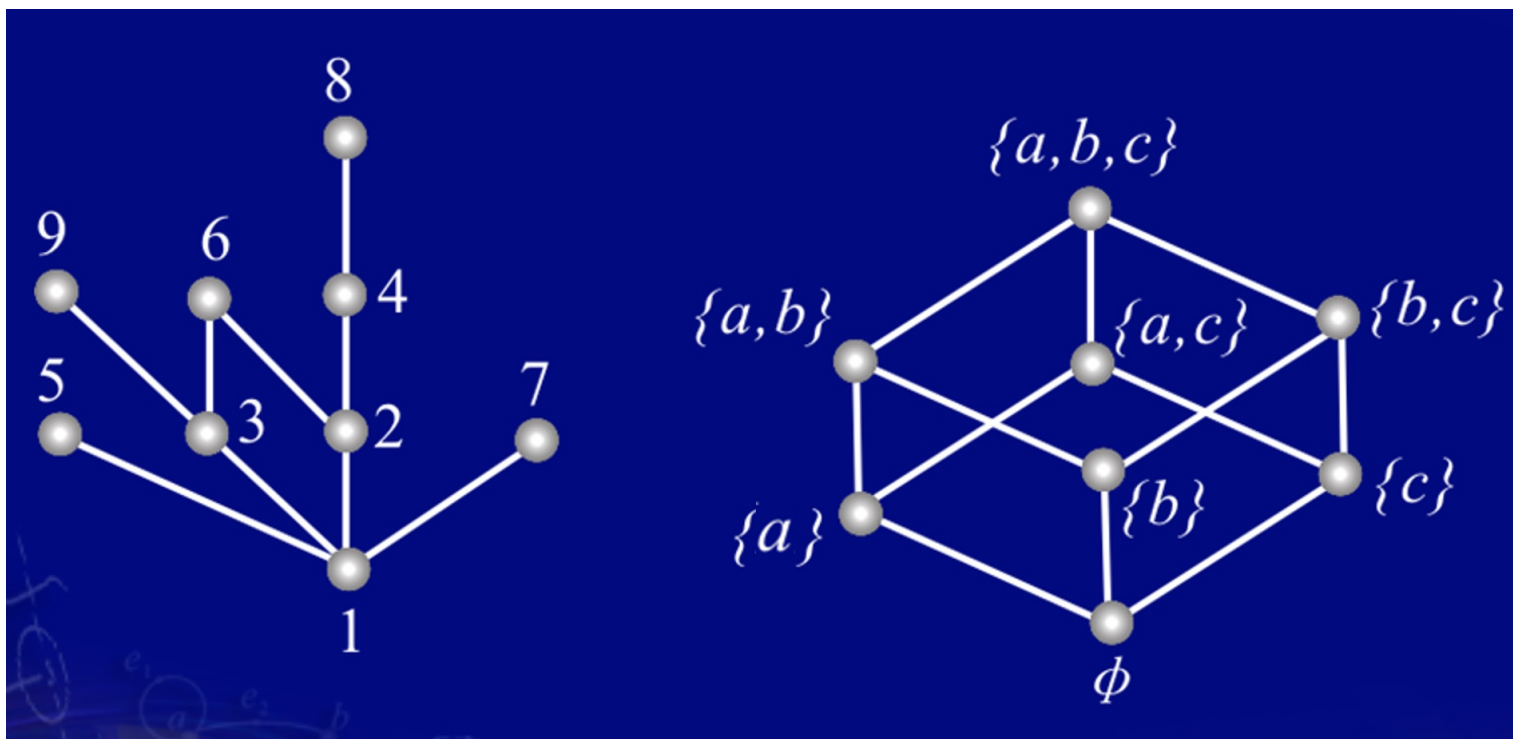
- 隐去所有顶点上的环
- 隐去所有因传递关系引出的边
- 根据箭头的方向自下而上重新排列所有的顶点，然后将所有的有向边替换为无向边
- 可见哈斯图中的边表示自上而下的覆盖



# 哈斯图 (续)



- 例：画出偏序集 $(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \text{整除})$  和  $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$ 的哈斯图

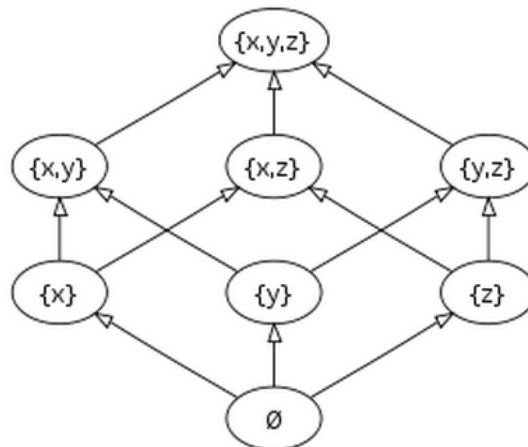




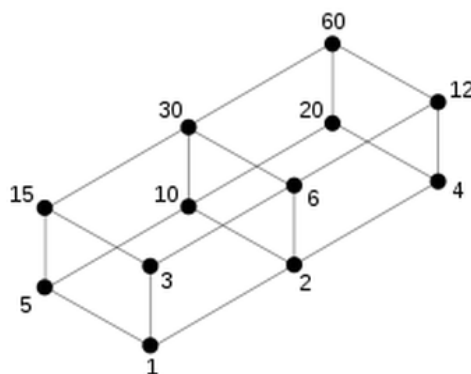
# 哈斯图 (续)



- The power set of  $\{x, y, z\}$  partially ordered by inclusion, has the Hasse diagram:

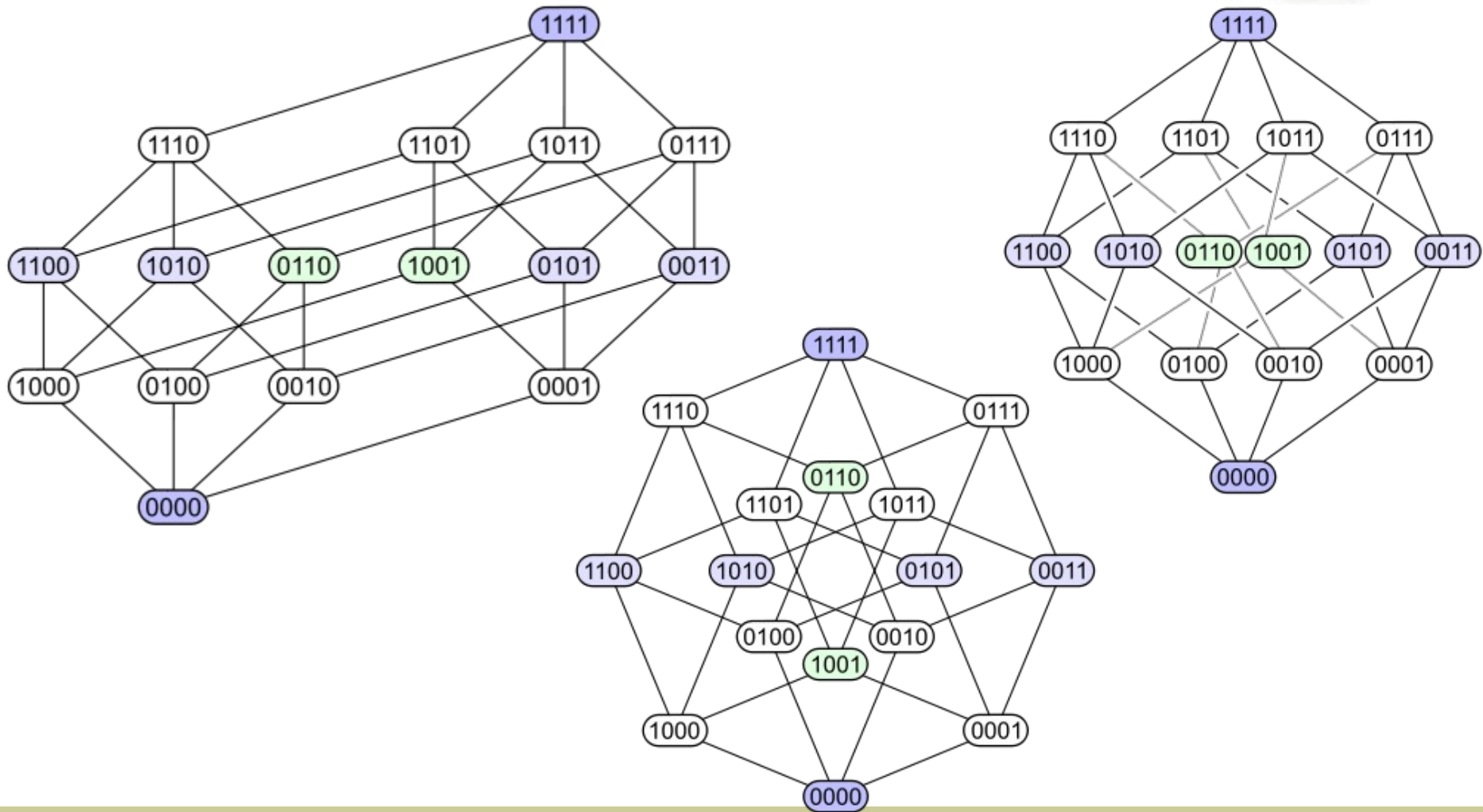


- The set  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$  of all divisors of 60, partially ordered by divisibility, has the Hasse diagram:



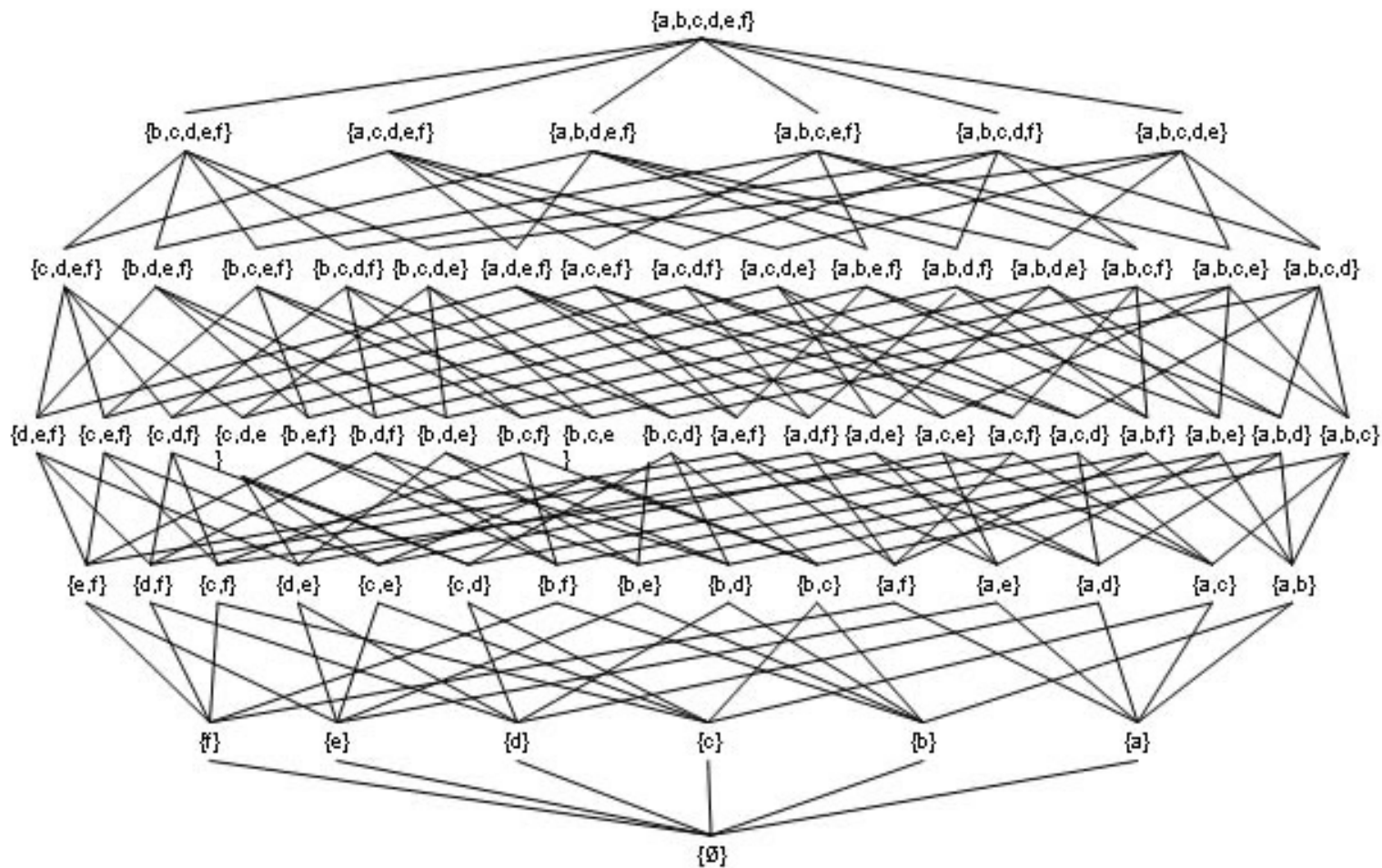


# 哈斯图 (续)





# 哈斯图 (续)

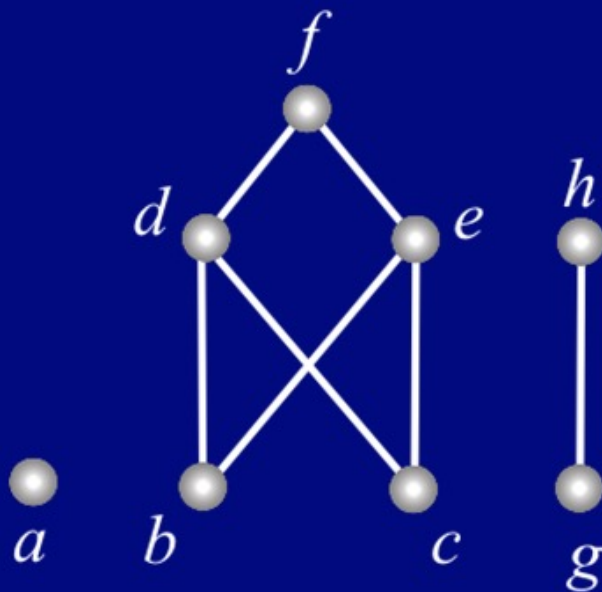




# 哈斯图 (续)



例 已知偏序集  $(A, R)$  的哈斯图如下图所示, 试求出集合  $A$  和关系  $R$  的表达式.



解  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R = \{(b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, f), (e, f), (g, h)\} \cup I_A$



# 偏序集中的特殊元素及其性质



## 1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义： 设  $(A, \leq)$  为偏序集,  $B \subseteq A, y \in B$ .

- (1) 若  $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$  成立, 则称  $y$  为  $B$  的最小元.
- (2) 若  $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$  成立, 则称  $y$  为  $B$  的最大元.
- (3) 若  $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$  成立, 则称  $y$  为  $B$  的极小元.
- (4) 若  $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$  成立, 则称  $y$  为  $B$  的极大元.

性质:

- 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元, 也是极大元.



# 偏序集中的特殊元素及其性质 (续)



## 2. 下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义： 设  $(A, \leq)$  为偏序集,  $B \subseteq A$ ,  $y \in A$ .

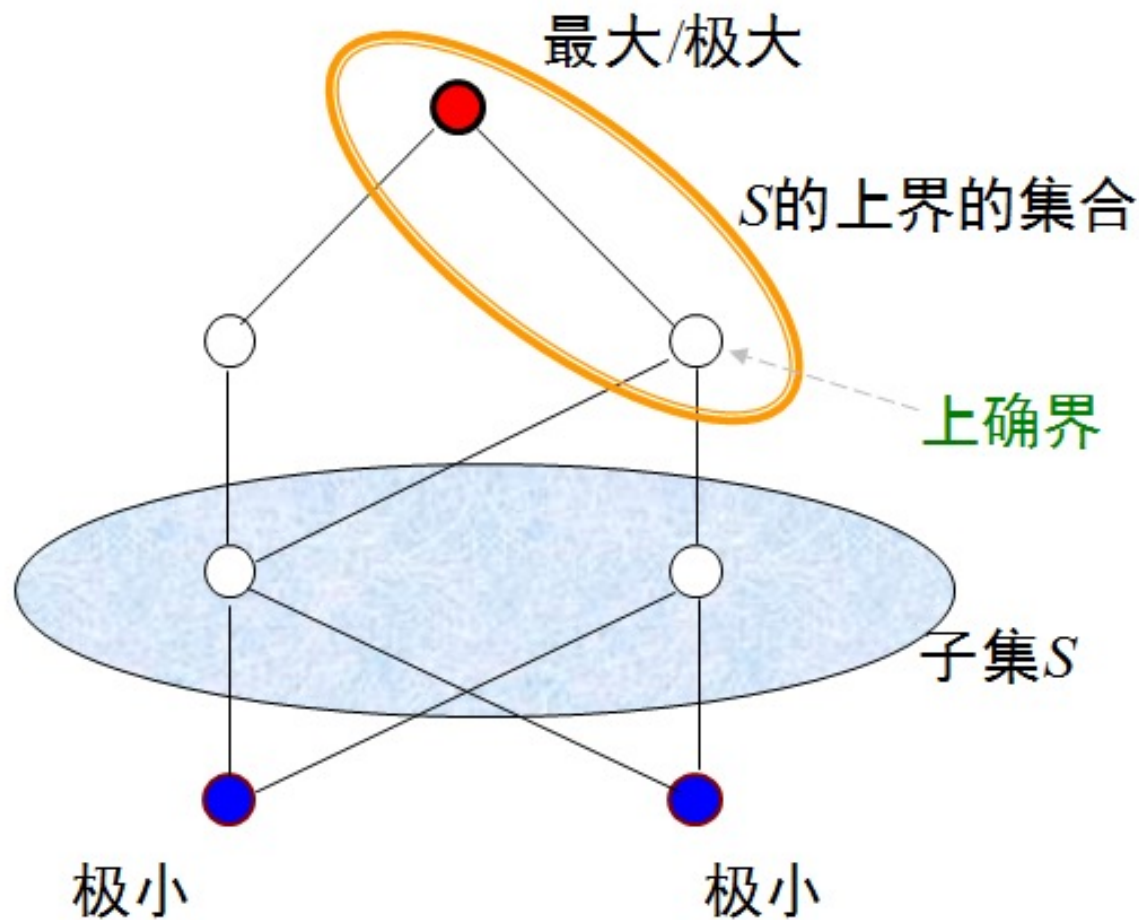
- (1) 若  $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$  成立, 则称  $y$  为  $B$  的上界.
- (2) 若  $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$  成立, 则称  $y$  为  $B$  的下界.
- (3) 令  $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$ , 则称  $C$  的最小元为  $B$  的最小上界或上确界.
- (4) 令  $D = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$ , 则称  $D$  的最大元为  $B$  的最大下界或下确界.

性质:

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在, 则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界, 最大元就是它的上确界; 反之不对.

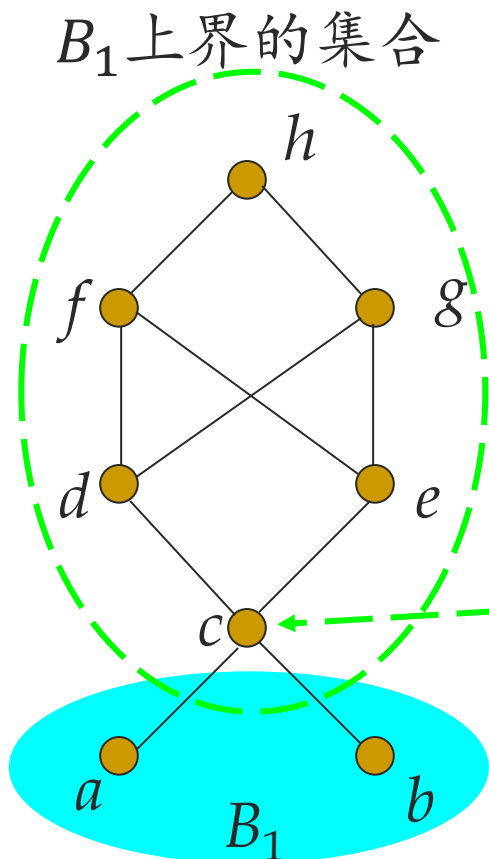


# 从哈斯图看特殊元素

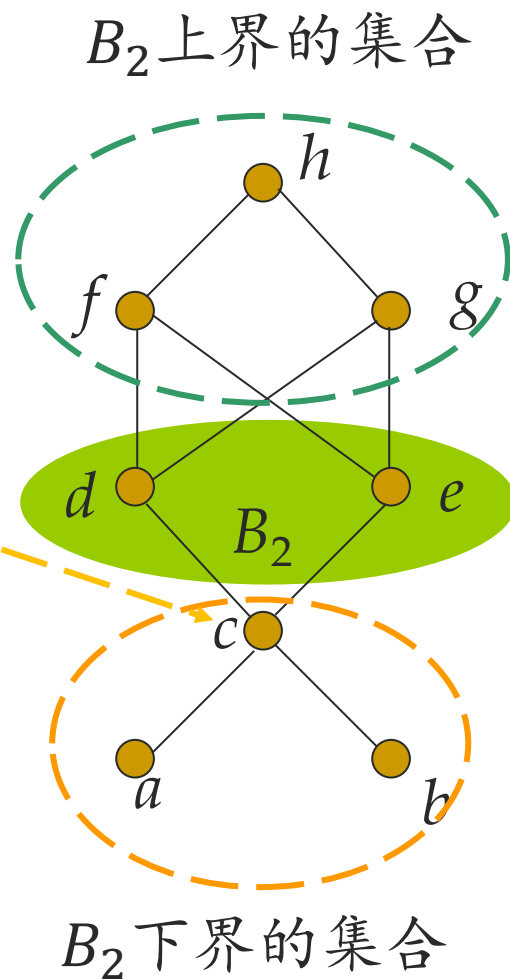




# 从哈斯图看特殊元素 (续)



$B_1$ 的上确界



$B_2$ 的下确界



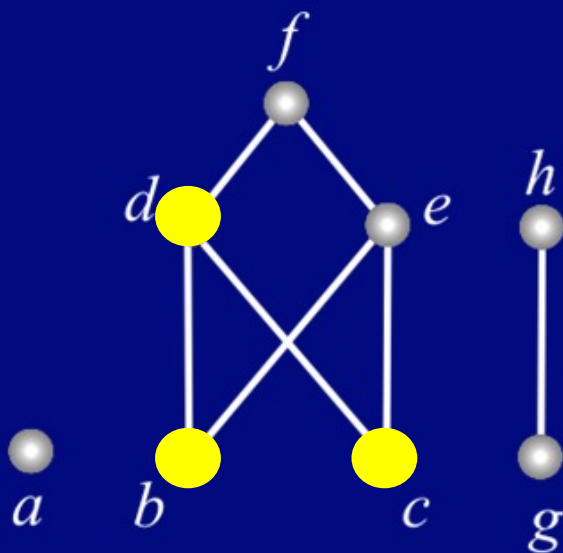
# 偏序集中的特殊元素及其性质 (续)



例 设偏序集  $(A, \leq)$  如下图所示,

求  $A$  的极小元、最小元、极大元、最大元.

设  $B = \{b, c, d\}$ , 求  $B$  的下界、上界、下确界、上确界.



解 极小元:  $a, b, c, g$ ; 极大元:  $a, f, h$ ; 没有最小元与最大元.

$B$  的下界和最大下界都不存在, 上界有  $d$  和  $f$ , 最小上界为  $d$ .



# 偏序集中的特殊元素及其性质 (续)



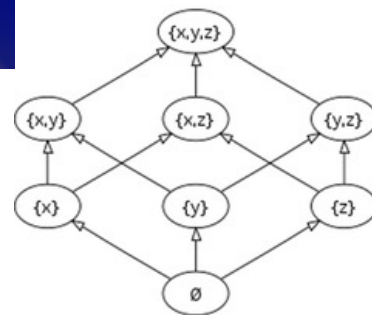
例 设  $X$  为集合,  $A = P(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$ , 且  $A \neq \emptyset$ . 若  $|X| = n, n \geq 2$ . 问:

- (1) 偏序集  $(A, R_{\subseteq})$  是否存在最大元?
- (2) 偏序集  $(A, R_{\subseteq})$  是否存在最小元?
- (3) 偏序集  $(A, R_{\subseteq})$  中极大元和极小元的一般形式是什么?  
并说明理由.

解  $(A, R_{\subseteq})$  不存在最小元和最大元, 因为  $n \geq 2$ .

$(A, R_{\subseteq})$  的极小元就是  $X$  的所有单元集, 即  $\{x\}, x \in X$ .

$(A, R_{\subseteq})$  的极大元恰好比  $X$  少一个元素, 即  $X - \{x\}, x \in X$ .





# 偏序集中的特殊元素及其性质 (续)



例 设偏序集  $(A, R)$  的哈斯图如图所示.

(1) 写出  $A$  和  $R$  的集合表达式

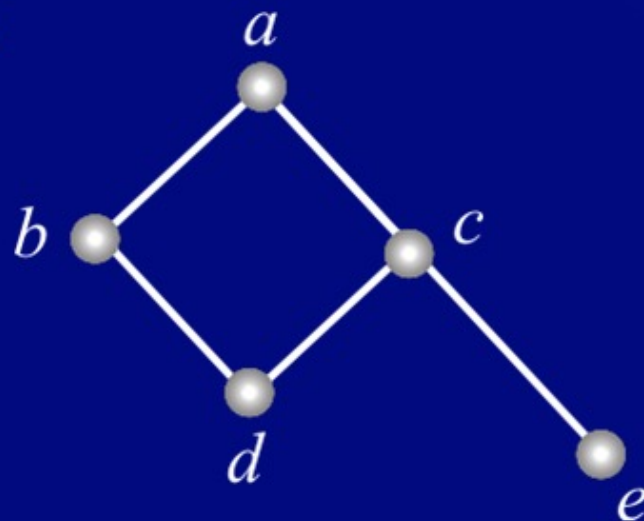
(2) 求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元



解 (1)  $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{(d, b), (d, a), (d, c), (e, c), (e, a), (b, a), (c, a)\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是  $a$ , 极小元是  $d, e$ ; 没有最小元.



# 偏序集中的特殊元素及其性质 (续)



例 设偏序集  $(A, R)$  和  $(B, S)$ , 定义  $A \times B$  上二元关系  $T$ :

$$(x, y) T (u, v) \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明  $T$  为偏序关系.

● 证 证明自反性 任取  $(x, y)$ ,

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow xRx \wedge ySy \Rightarrow (x, y) T (x, y)$$

证明反对称性 任取  $(x, y), (u, v)$

$$\begin{aligned} (x, y) T (u, v) \wedge (u, v) T (x, y) &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v \\ &\Rightarrow (x, y) = (u, v) \end{aligned}$$

证明传递性 任取  $(x, y), (u, v), (w, t)$

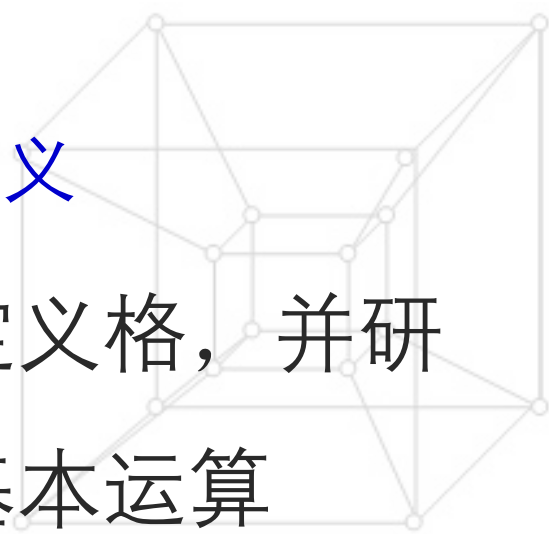
$$\begin{aligned} (x, y) T (u, v) \wedge (u, v) T (w, t) &\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt \\ &\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt \\ &\Rightarrow (x, y) T (w, t) \end{aligned}$$



# 偏序集与格



- **格** (lattice) 作为一个代数系统（第17讲介绍）可以通过两种方式进行定义：
  - (1) 通过偏序集与偏序关系定义
  - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 本讲我们仅从偏序的角度去定义格，并研究其中基于偏序关系的格的基本运算





# 偏序关系与格（续）



## ■ 格作为偏序集的定义：

定义： 设  $(S, \leq)$  是偏序集，如果  $\forall x, y \in S$ ， $\{x, y\}$  都有最小上界和最大下界，则称  $S$  关于偏序  $\leq$  作成一个格。

由于最小上界和最大下界的惟一性，可以把求  $\{x, y\}$  的最小上界和最大下界看成  $x$  与  $y$  的二元运算  $\vee$  和  $\wedge$ ，即  $x \vee y$  和  $x \wedge y$  分别表示  $x$  与  $y$  的最小上界和最大下界。

注意：本章中出现的  $\vee$  和  $\wedge$  符号只代表格中的运算，而不再有其他含义。



# 偏序关系与格 (续)



## 2. 格的实例

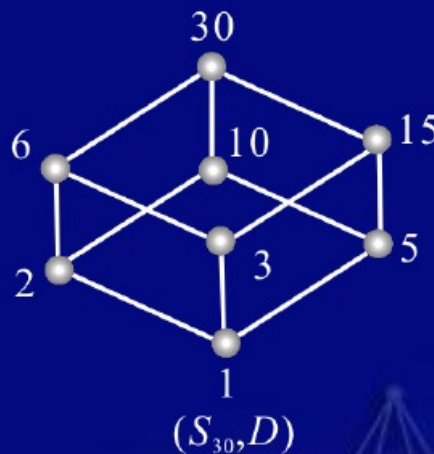
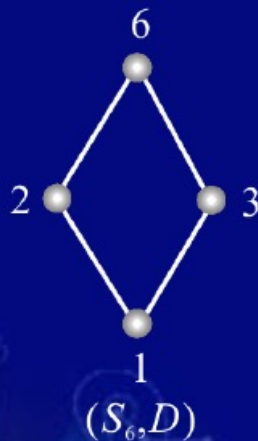
例 设  $n$  是正整数,  $S_n$  是  $n$  的正因子的集合.

$D$  为整除关系, 则偏序集  $(S_n, D)$  构成格.

$\forall x, y \in S_n$ ,  $x \vee y$  是  $\text{lcm}(x, y)$ , 即  $x$  与  $y$  的最小公倍数.

$x \wedge y$  是  $\text{gcd}(x, y)$ , 即  $x$  与  $y$  的最大公约数.

下图给出了格  $(S_8, D)$ ,  $(S_6, D)$  和  $(S_{30}, D)$ .



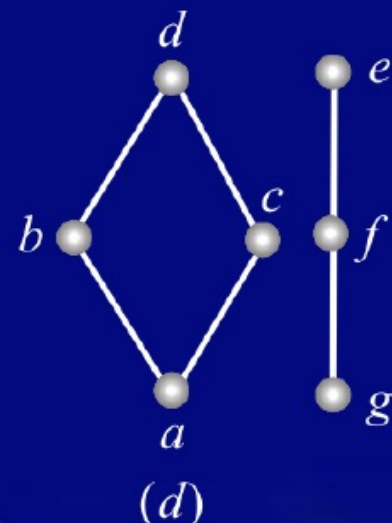
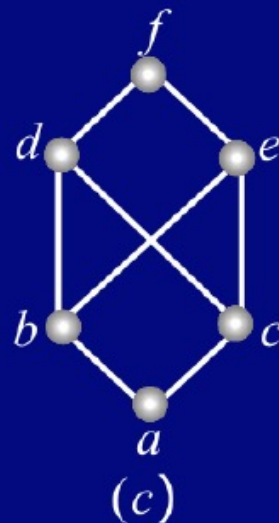
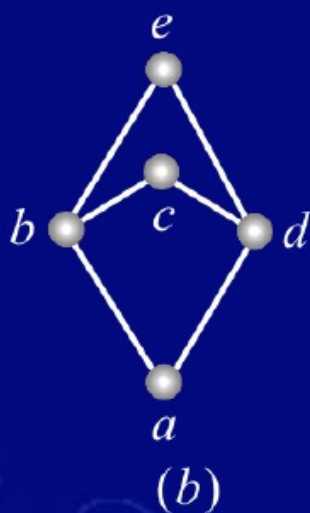
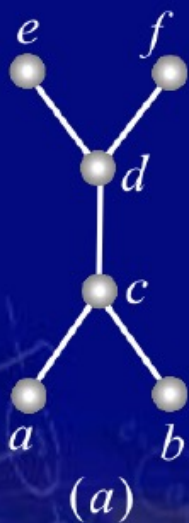


# 偏序关系与格 (续)



例 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

- (1)  $(P(B), \subseteq)$ ，其中  $P(B)$  是集合  $B$  的幂集.
- (2)  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ，其中  $\mathbb{Z}$  是整数集， $\leq$  为小于或等于关系.
- (3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.





# 格的对偶原理



## 对偶原理

### (1) 对偶命题

定义： 设 $f$ 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 $f^*$ 是将 $f$ 中的 $\leq$ 替换成 $\geq$ ,  $\geq$ 替换成 $\leq$ ,  $\vee$ 替换成 $\wedge$ ,  $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题. 称 $f^*$ 为 $f$ 的对偶命题.

例如, 在格中令

$f$  是  $(a \vee b) \wedge c \leq c$ ,

$f^*$  是  $(a \wedge b) \vee c \geq c$ .



# 格的对偶原理 (续)



## (2) 格的对偶原理

设  $f$  是含有格中元素以及符号  $=, \leq, \geq, \vee$  和  $\wedge$  等的命题.

若  $f$  对一切格为真, 则  $f$  的对偶命题  $f^*$  也对一切格为真.

例如, 如果对一切格  $L$  都有

$$\forall a, b \in L, a \wedge b \leq a$$

那么对一切格  $L$  都有

$$\forall a, b \in L, a \vee b \geq a$$



# 本次课后作业



- 教材内容: [Rosen] 9.6 节
- 课后习题:
  - Problem Set 16
- 提交时间: 4月22日 10:00前

