



离散数学

Discrete Mathematics

第一讲：命题逻辑初步

吴楠

南京大学计算机学院

2025年2月18日



本讲主要内容



- 逻辑与命题
- 命题联结词
- 自然语言命题的形式化
- 命题的等值演算
- 范 式（自学内容）
- 命题逻辑的可判定性



命题逻辑初步



■ 什么是逻辑？

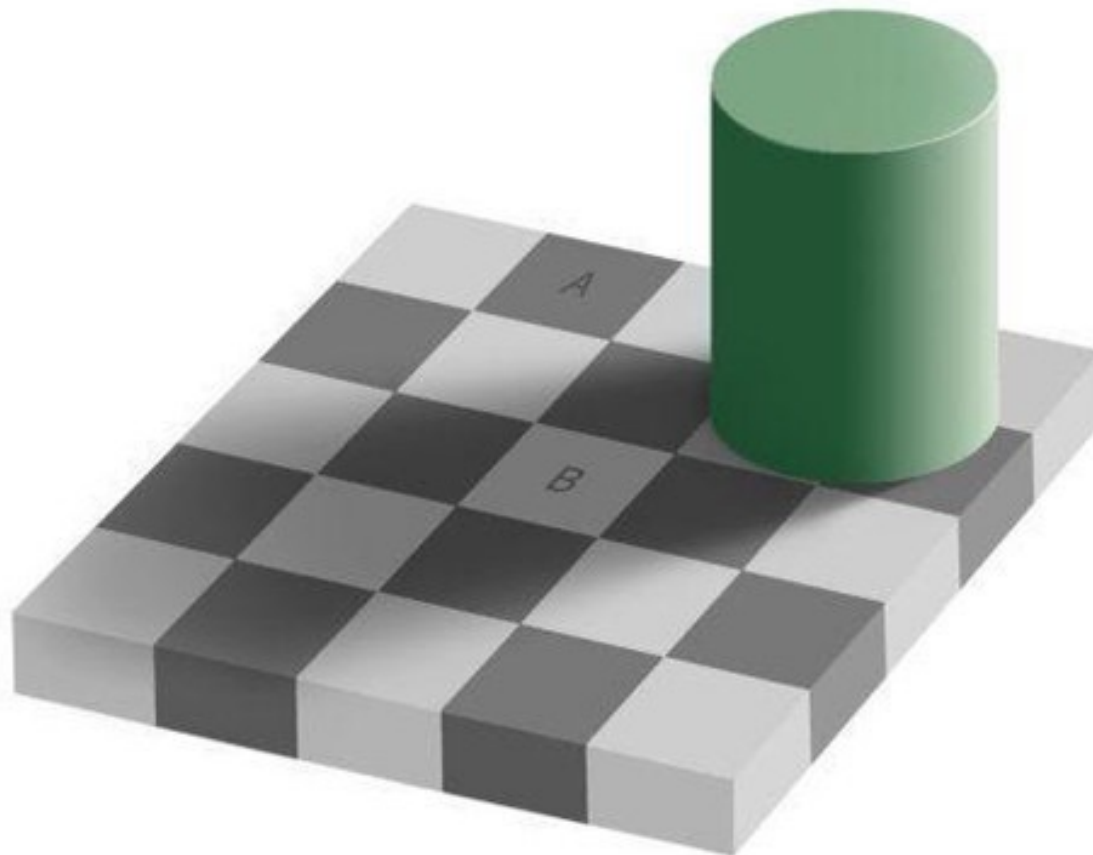
- 在数学里，逻辑是指研究某个形式语言的^{有效推论}

■ 逻辑有什么作用？

- 逻辑令对问题的描述变得^{严谨、无歧义}
- 逻辑引导人们通过推理获得^{事物的本质}



“眼见”未必为实

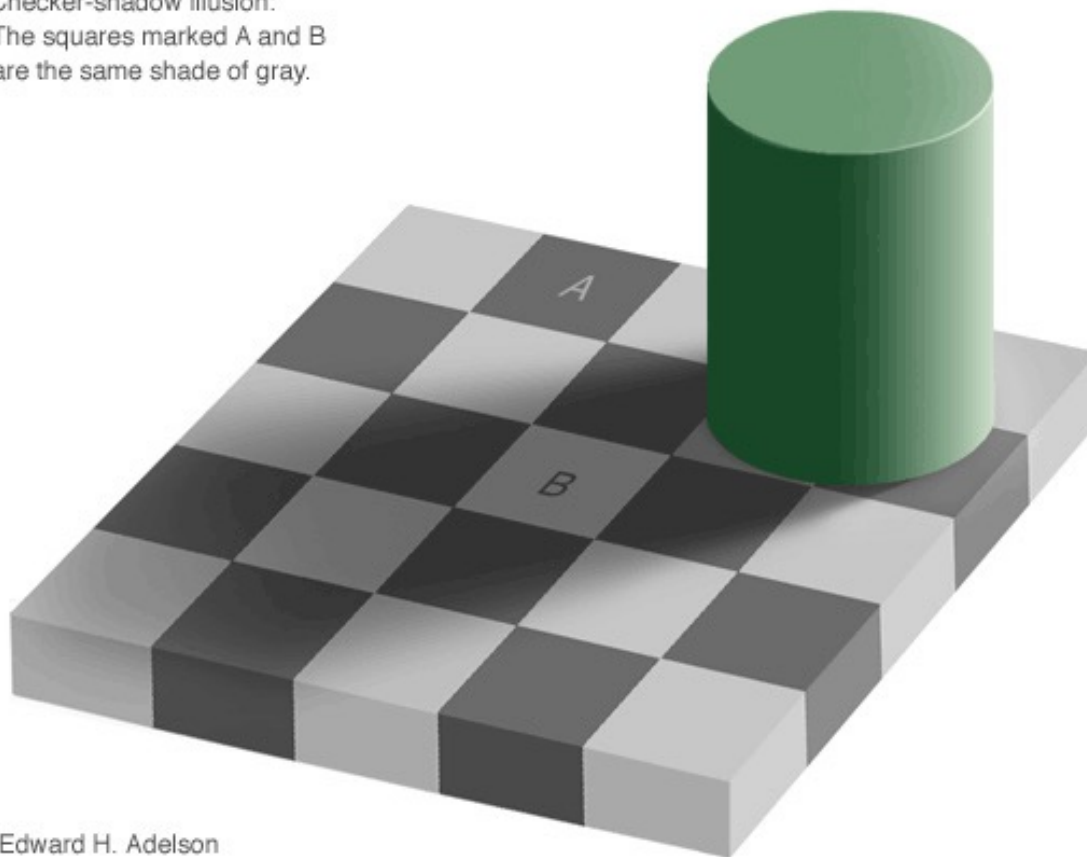




“眼见”未必为实



Checker-shadow illusion:
The squares marked A and B
are the same shade of gray.

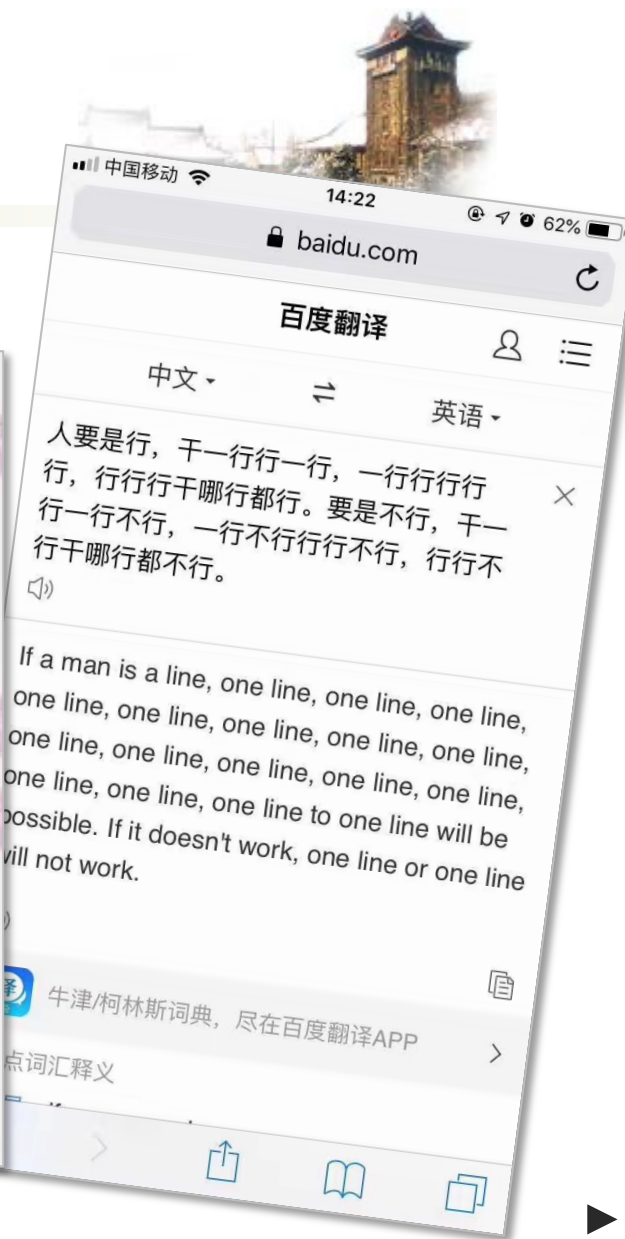
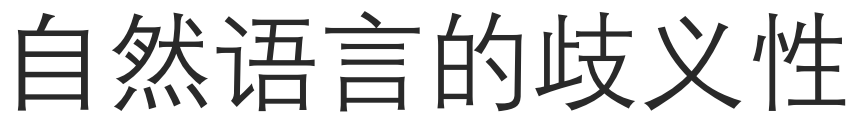


Edward H. Adelson



“直觉”未必可靠







自然语言的复杂性



小张和小王正在谈论小李，突然门外进来一个人，小张对小王说：“说曹操曹操到。”请问谁进来了？



很抱歉，我无法确定是谁进来了。因为“说曹操曹操到”这句话是一个俗语，意思是当说话者预料到的事情发生了，但并不透露是谁进来了。





自然语言的复杂性 (续)



请翻译以下句子为英文：“人要是行，干一行行一行，一行行行行行；要是不行，干一行不行一行，一行不行行行不行。”



"If one is capable, then do one thing, and do it well, step by step, until it is accomplished; if one is not capable, then attempt to do one thing, but without success, step by step, until it is given up."



Note: This is a famous quote from a Chinese poem by the poet, Su Shi (苏轼), also known as Su Dongpo (苏东坡). It is often translated in different ways, as the meaning and interpretation can vary depending on the context.



公共汽车的广播里说：“前门到了，请从后门下车。”，请问到了哪一个车站？应该从哪个车门下车？

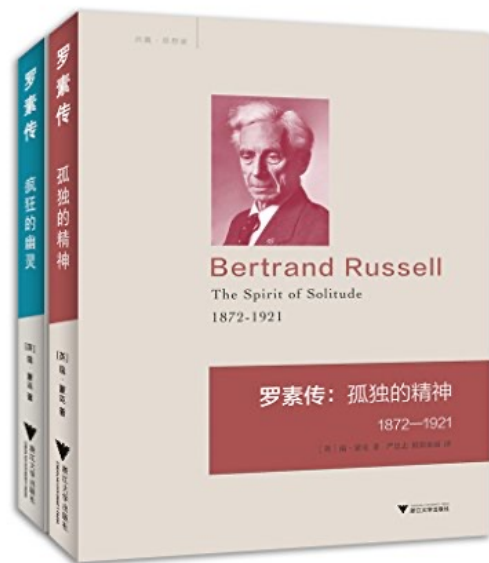


无法确定具体是哪一个车站，需要进一步的信息才能确定。一般来说，在公共汽车的广播里，会在报站之后再提示乘客从哪个车门下车。因此，如果您想确定应该从哪个车门下车，建议您多加留意车内的广播提示，并观察其他乘客的行动。



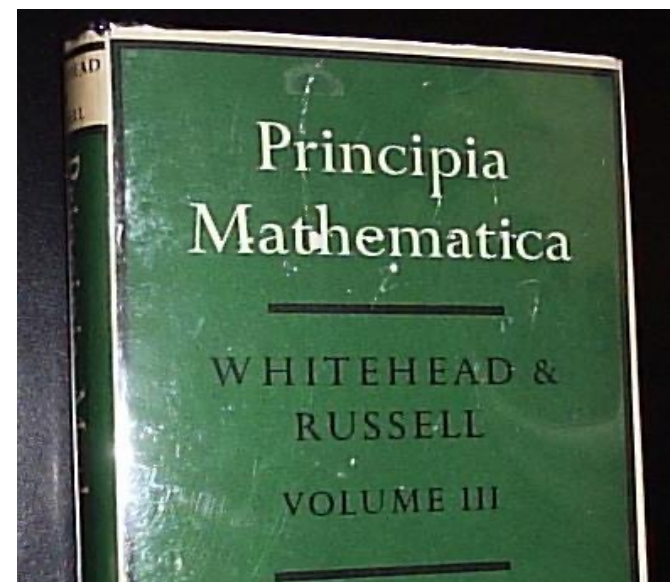
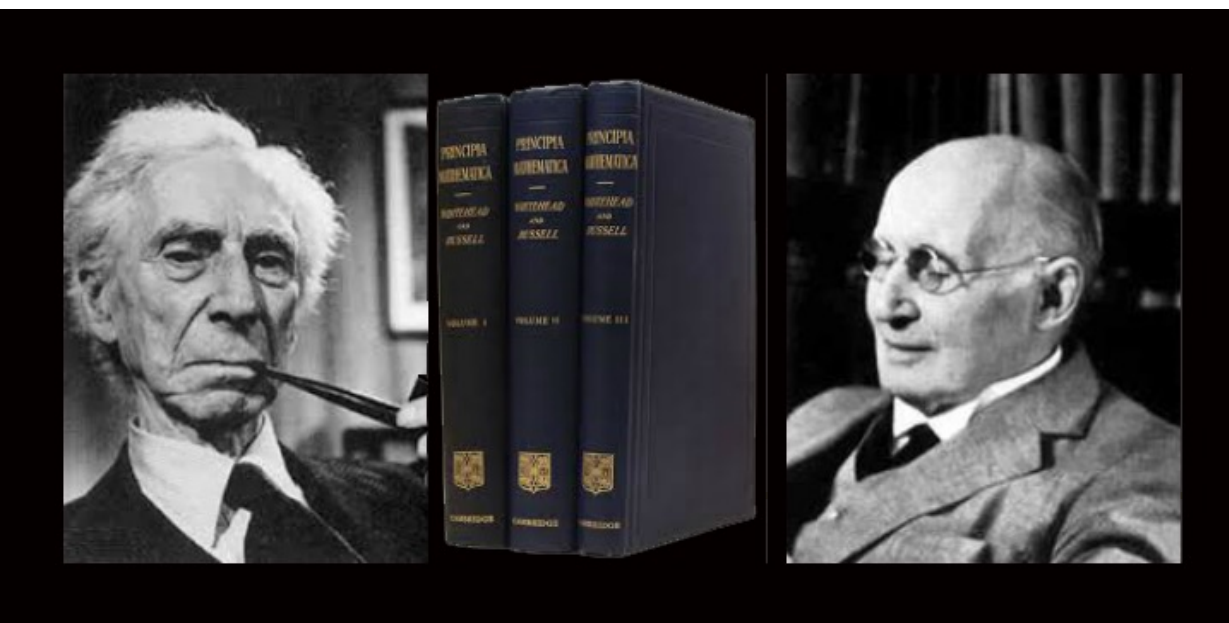
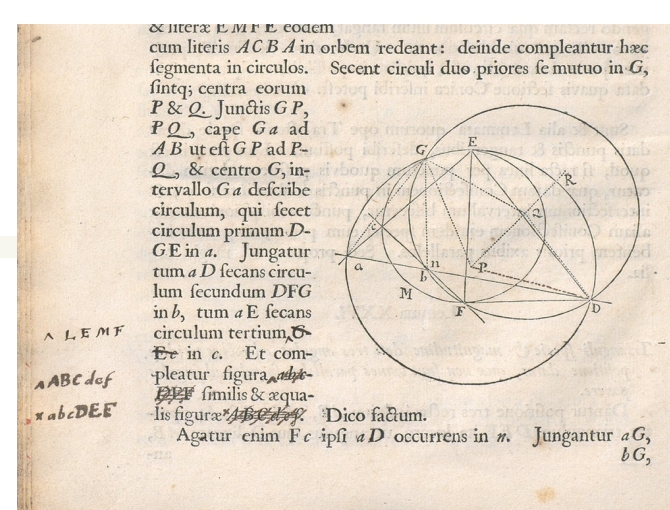
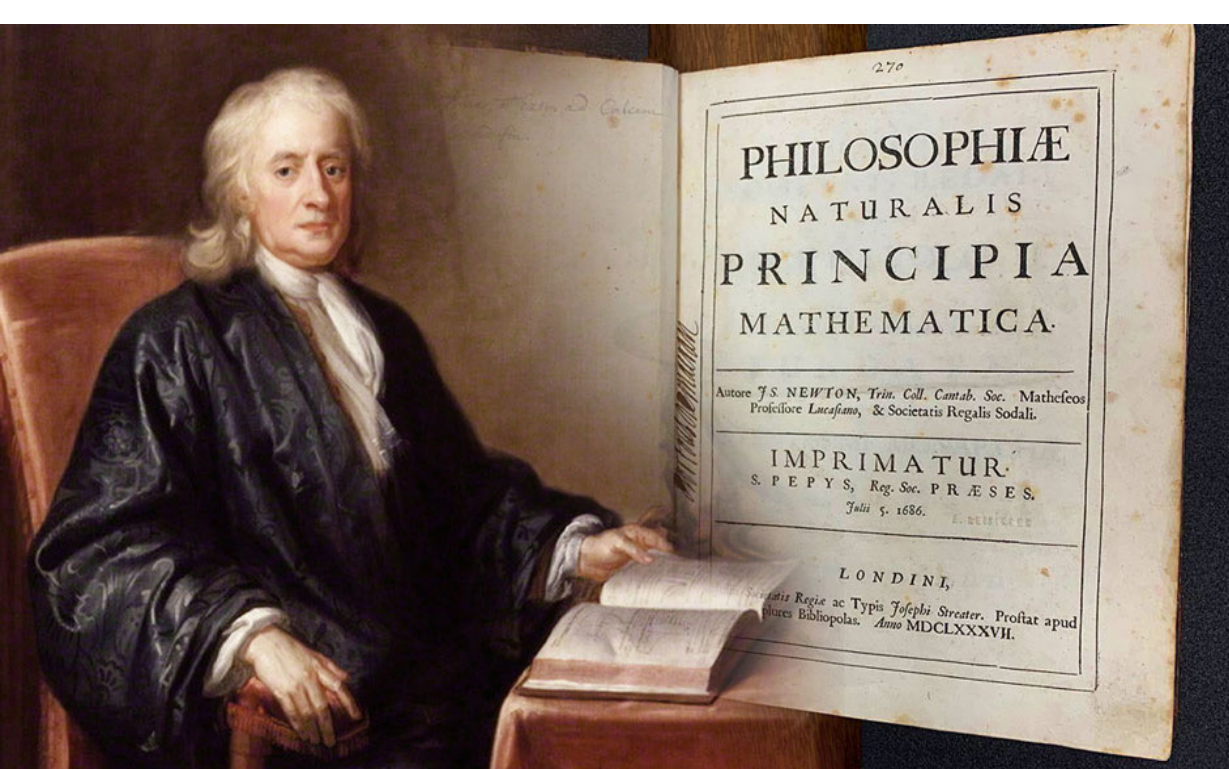


命题是什么？



我很想知道，你是否意识到，在撰写这本大部头著作的过程中，我作出多少自我牺牲（而且常常还有他人的牺牲），表现了多大的意志力，作出多少艰苦努力，克制了多少自己内心之中的良好愿望？年复一年，我在已经完成的书稿中发现错误，不得不推倒重来，撰写整个书稿。其原因在于，在一个逻辑体系中，哪怕出现一个错误，通常也会损害全部结构。我觉得，自己最后遭遇了最艰难的问题：去年夏天，我愉快地再次提笔，希望很快完成书稿，但是突然遇到一个自己以前并不知道的难题。它非常棘手，甚至思考它也需要具有超出常人的能力。我很久以前就对整个问题感到恶心了，真的希望考虑世间的其他事情。我身心疲惫，几乎动弹不得。现在，一切都结束了。正如你可以想象的，我觉得自己获得了新生——我曾经一度感到绝望，认为自己根本无法坚持到最后。抽象工作——如果一个人希望做好它——肯定会彻底破坏一个人的基本特性。一个人竖立丰碑的同时也在挖掘坟墓，以自愿的方式，将自我慢慢注入进去。





*54.43. $\vdash \therefore a, b \in 1. \supset : a \cap b = \Lambda. \equiv. a \cup b \in 2$

Dem.

$\vdash. *54.26. \supset \vdash \therefore a = t'x. b = t'y. \supset : a \cup b \in 2. \equiv. x \neq y.$

[*51.231] $\equiv. t'x \cap t'y = \Lambda.$

[*13.12] $\equiv. a \cap b = \Lambda$ (1)

$\vdash. (1). *11.11.35. \supset$

$\vdash \therefore (x, y). a = t'x. b = t'y. \supset : a \cup b \in 2. \equiv. a \cap b = \Lambda$ (2)

$\vdash. (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash. \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

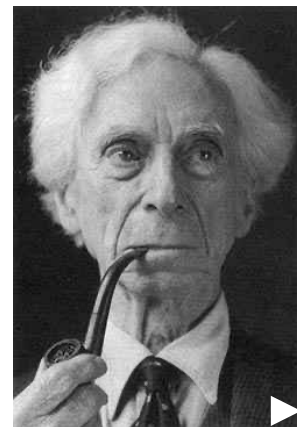


命题的诠释



- 命题 (proposition) 是无法严格定义的，一般可用如下解释
- We mean by a “**proposition**” primarily **a form of words** which expresses what is either **true** or **false**.

—— B. Russell: *Introduction to Mathematical Philosophy*





命题与命题的值



■ 例：

- (1) “罗素是人。”和“罗素不是人。”都是命题
- (2) “你是计算机系的学生吗？”因为不能分辨真假，故不是命题
- (3) “明天是艳阳天。”是命题，虽然我们要等到明天才能知真假

- 命题表达的陈述或真或假，但不可兼具，这时也称命题取真或取假。称真值可以变化的命题为命题变元，用小写字母 p, q, r 等表示



命题与命题的值 (续)



■ 判断下列句子是否为命题

✓ ○ $1 + 1 = 2$.

✓ ○ 李明是学生。

✓ ○ 今天是星期五。

✗ ○ 你会说英语吗？

✗ ○ $3 - x = 5$.

✗ ○ 我们走吧！

✓ ○ 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。

✗ ○ 他是个多好的人呀！

✗ ○ “我现在说的是假话。”



命题与命题的值（续）



- 一般用“ T ”表示真，“ F ”或“ \perp ”表示假；在古典的二值逻辑中，命题只有这两种取值。但近代逻辑中还有多值系统的理论。
- 在通常的语言表达中，需要用简单命题复合成复杂命题，这需要用到**命题联结词**（connective），常用的命题联结词有5个：**否定**（negation），**合取**（conjunction），**析取**（disjunction），**蕴涵**（entailment），**双蕴涵**（mutual entailment）



命题联结词



- 1. 否定联结词：若 p 为命题，则 p 的否定“非 p ”也为命题，记为 $\neg p$ （或 \bar{p} ）。复合命题的真值可由其构件命题的真值表示，一般用所谓的真值表表示。因此真值表说明了联结词的语义。否定联结词的真值表如下：

p	$\neg p$
T	\perp
\perp	T



命题联结词（续）



- 2. 合取联结词：若 p, q 为命题，则 p 与 q 的合取“ p 且 q ”也为命题，记为 $p \wedge q$ 。真值表如下：

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	\perp
\perp	\perp	\perp



命题联结词（续）



- 3. 析取联结词：若 p, q 为命题，则 p 与 q 的析取“ p 或 q ”也为命题，记为 $p \vee q$ 。真值表如下：

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	\perp	T
\perp	T	T
\perp	\perp	\perp



命题联结词（续）



- 4. 蕴涵联结词：若 p, q 为命题，则 p 与 q 的蕴涵式“若 p 则 q ”（或“ p 蕴涵 q ”）也为命题，记为 $p \rightarrow q$ （或 $p \supset q$ ）。真值表如下：

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	T
\perp	\perp	T



命题联结词（续）



- 5. 双蕴涵联结词：若 p, q 为命题，则“ p 双蕴涵 q ”（或“ p 等价于 q ”）也为命题，记为 $p \leftrightarrow q$ 。真值

表为：

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	\perp
\perp	\perp	T

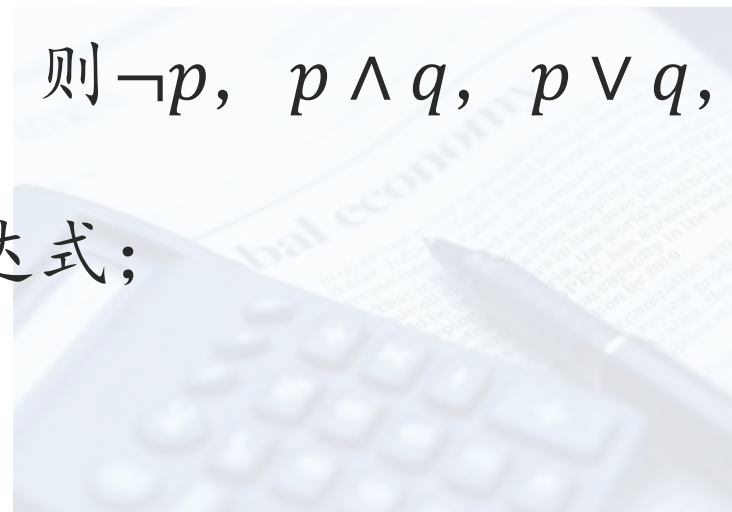


命题表达式



■ 定义（命题表达式）：

- (1) 命题变元为命题表达式（或命题公式）；
- (2) 若 p, q 为命题表达式，则 $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ 皆为命题表达式；
- (3) 命题表达式仅限于此





将自然语言翻译为命题表达式

- 将自然语言中的陈述性成分抽出来作为命题变元，然后选择适当的命题联结词构成符合原句含义的命题表达式
- 此为传统基于自然语言结构的自然语言处理 (NLP) 技术中最难处理的问题之一



将自然语言翻译为命题表达式 (续)

- 例：“如果你主修计算机科学或不是新生，你就可以从校园网访问因特网。”
 - p : 你可以从校园网访问因特网。
 - q : 你主修计算机科学。
 - r : 你是新生。
 - 上句可翻译为: $(q \vee \neg r) \rightarrow p$



将自然语言翻译为命题表达式 (续)

■ 例：父子对话

- 儿子：“爸爸，我要玩游戏。”
- 父亲：“你不做完作业就不能玩游戏。”

- p : 你做完了作业。
- q : 你可以玩游戏。

■ 划线的句子可翻译为： $\neg p \rightarrow \neg q$

■ **思考：**按照父亲的逻辑，儿子做完作业后是不是就可以玩游戏了？



自然语言命题的形式化



- **目的：** 用逻辑推理的方法解决实际问题
- **方法：** 首先确定复合命题中的“原子命题”，将其用命题变元代替，再观察复合命题中的逻辑关系（“和”、“或”、“否”、“若…则…”等），然后用命题联结词联结各原子命题。注意分辨自然语言中细微的逻辑差异
- **例：** 只有计算机科学与技术系的老师或学生才能参加本次迎新晚会。



命题表达式的值



■ 命题表达式（公式） $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$ 的值

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

该命题公式的所有指派

该公式的一种“成真指派”



命题表达式的值 (续)



- 命题表达式 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ 的值

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1



永真式、矛盾式和可能式



- **永真式**（重言式，tautology）：无论其中出现的命题变元如何取值，表达式总取真。如： $p \vee \neg p$
- **矛盾式**（永假式，absurdity）：无论其中出现的命题变元如何取值，表达式总取假。如： $p \wedge \neg p$
- **可能式**（可满足式，contingency）：上述情况以外的其它命题表达式。比如： $\neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0



逻辑等价



- 若在所有情况下命题 p 与 q 均具有相同的真值，即 $p \leftrightarrow q$ 永真，则称 p 与 q 逻辑等价，记为 $p \equiv q$ （或 $p \Leftrightarrow q$ ，注意：“逻辑等价”不是命题联结词）
- 例： $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ ； $p \wedge \neg p \equiv F$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1



常用的逻辑等价



名 称	等价形式	名 称	等价形式
双重否定律	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$	支配律	$A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
幂等律	$A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$	恒等律	$A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
交换律	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
结合律	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	矛盾律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	蕴含等值式	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	等价等值式	$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	假言易位	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
		等价否定等值式	$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A$
		归缪论	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$



蕴涵的等值式



- 两个重要的蕴涵等值式：

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (\text{蕴涵等值})$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A \quad (\text{假言易位})$$

- 这两个等值式常被用于逻辑等价的证明



命题的等值演算



- **练习1:** 证明 $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
- ◆ **证明:** $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$
- **练习2:** 证明 $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ 是重言式
- ◆ **证明:** $p \wedge q \rightarrow p \vee q \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
 $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \equiv T$
- **注意:** 命题联结词的**优先级自高到低**分别为: \neg , \wedge , \vee ,
 \rightarrow , \leftrightarrow



命题的等值演算（续）



- 方法1：用真值表判定
- 方法2：利用已有的逻辑等值式进行等价替换

$$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\text{证明: } (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴涵等价式})$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \quad (\text{分配律})$$

$$\equiv \neg(p \vee q) \vee r \quad (\text{德摩根律})$$

$$\equiv (p \vee q) \rightarrow r \quad (\text{蕴涵等价式})$$



- 命题公式的形式各异，为研究命题逻辑带来困难，能否将所有的命题公式转化为统一的标准形式？
 - 命题联结词可以通过等值演算进行转化，任何命题公式都可写为仅用 $\{\neg, \wedge\}$ 或者 $\{\neg, \vee\}$ 联结的形式
 - 总能够通过命题等值演算将任意命题公式转化为一列命题变元（及其否定）的析取或者合取的形式



范式 (续)



■ 定义 (范式) :

- (1) 命题变元及其否定总称为文字 (literal) ;
- (2) 有限文字组成的析取式或合取式称为简单析取式或简单合取式;
- (3) 由有限简单合取式组成的析取式称析取范式;
- (4) 由有限简单析取式组成的合取式称合取范式;
- (5) 析取范式与合取范式总称范式 (normal form)



范式 (续)



■ 定理 (范式存在性定理) :

任何命题公式都存在与之逻辑等价的析取范式与合取范式

- 证明 (构造法) : 用以下步骤构造任意命题公式的合取范式和析取范式: ①消去联结词 \rightarrow 和 \leftrightarrow ; ②用双重否定律消去 $\neg\neg$, 用德摩根律内移 \neg ; ③使用分配律——求析取范式时用 \wedge 对 \vee 的分配律, 求合取范式时用 \vee 对 \wedge 的分配律. \square



命题逻辑的可判定性



- 能否判定一个命题公式永真或永假？

- **定理**（**简单析取式的永真性判定**）：

一个简单析取式是重言式当且仅当其同时含有某个命题变元及其否定式

- **定理**（**简单合取式永假性判定**）：

一个简单合取式是矛盾式当且仅当其同时含有某个命题变元及其否定式





命题逻辑的可判定性（续）



■ 定理（析取范式的永假性判定）：

一个析取范式是矛盾式当且仅当其每个简单合取式皆为矛盾式

■ 定理（合取范式的永真性判定）：

一个合取范式是重言式当且仅当其每个简单析取式皆为重言式

■ 因为每个命题公式均可转化为析取范式或合取范式，因此命题逻辑系统是可判定（decidable）的



命题逻辑的可判定性 (续)



■ 例:

判定命题公式 $(q \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow p) \wedge \neg(q \rightarrow p)$

○ 解: 原式 $\equiv (\neg(q \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee p) \wedge \neg(\neg q \vee p)$

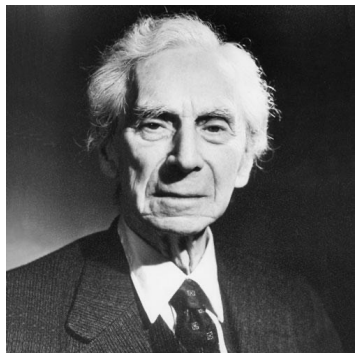
$$\equiv (\neg q \vee (p \wedge q) \vee p) \wedge (q \wedge \neg p)$$

$$\equiv (\neg q \wedge q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge \neg p)$$

易见以上析取范式为矛盾式, 因此原命题公式永假. \square



伯特兰·罗素



Bertrand Arthur William Russell (1872–1970) 出生于古老而显赫的贵族家庭，他的祖父在维多利亚时代曾两度出任首相。祖母曾在他12岁生日时赠送给他一本《圣经》，书的扉页上题写着“勿随众人作恶”，这句话成为罗素一生道德上的座右铭。

罗素喜爱数学，少年时代便开始哲学思考，探求数学之完美与宗教之可疑的哲学根据。18岁那年，罗素考入剑桥大学三一学院，四年级时他的兴趣转向哲学，大学毕业的第二年，罗素获得了三一学院研究员的职位。1900至1910年间，他同怀特海合作撰写了《数学原理》。该书被人们看作是数学和逻辑发展史上的里程碑。1950年被授予诺贝尔文学奖。

1960年代筹建罗素和平基金会，曾参与调停古巴导弹危机、阿以冲突和中印边界冲突，反对美国的越南战争。1965年获得世界和平奖。98岁逝世，给后人留下了七十多部论著和几千篇论文，涉及哲学、数学、伦理、政治、历史、文学以及教育等诸多领域。



伯特兰·罗素 (续)





伯特兰·罗素 (续)





本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 1.1、1.2、1.3节
- 课后习题：
 - Problem Set 1
- 提交时间：2月25日 10:00 之前