



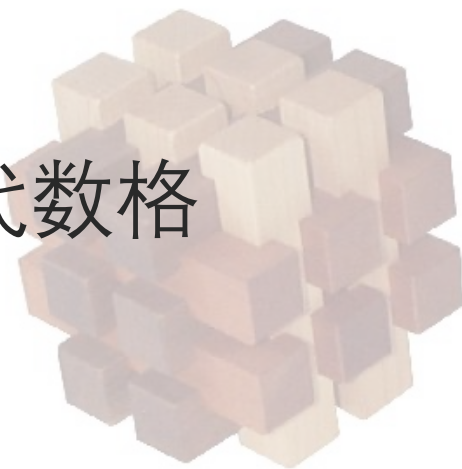
# 离散数学

## Discrete Mathematics

### 第二十一讲：偏序格与代数格

吴楠

南京大学计算机学院



2025 年 5 月 9 日



# 前情提要



- 循环群与生成元
- 循环群的子群
- 群的同构与同态
- 无限循环群的同构群
- 有限循环群的同构群

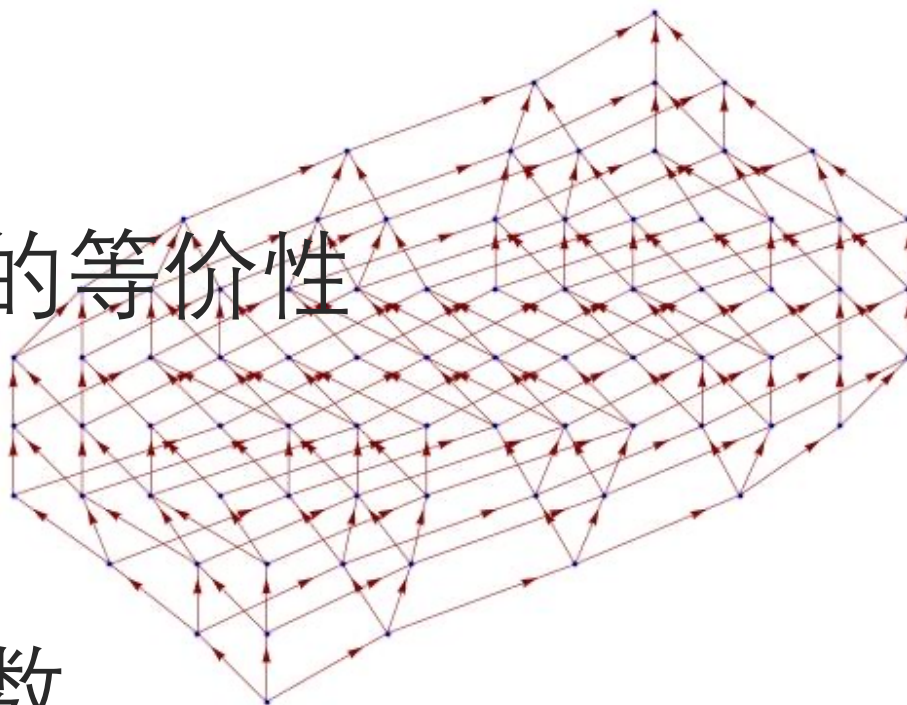




# 本讲主要内容



- 偏序集与格（回顾）
- 格的对偶原理
- 格的性质
- 代数格与偏序格的等价性
- 格同态与格同构
- 分配格与有补格
- 布尔格与布尔代数





# 偏序集与格



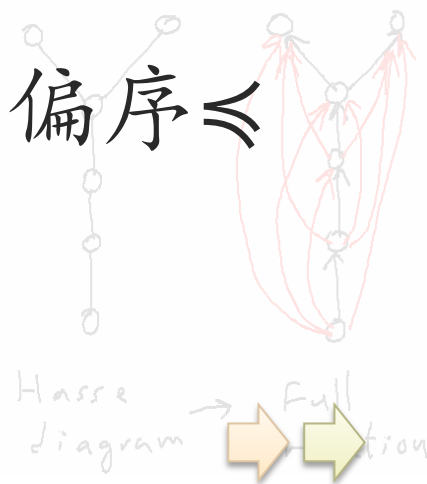
- **格** (lattice) 作为一个代数系统可以通过两种不同的方式进行定义：
  - (1) 通过偏序集与偏序关系定义 (见第十六讲)
  - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- **对立与统一**：本讲我们研究格在上述两种不同的定义与表象中蕴含的统一的本质



# 偏序关系与格（续）



- 格作为偏序集的定义：设  $(S, \leq)$  为偏序集，若  $\forall x, y \in S$ ， $\{x, y\}$  皆有上确界和下确界，则称集合  $S$  关于偏序  $\leq$  构成（偏序）格

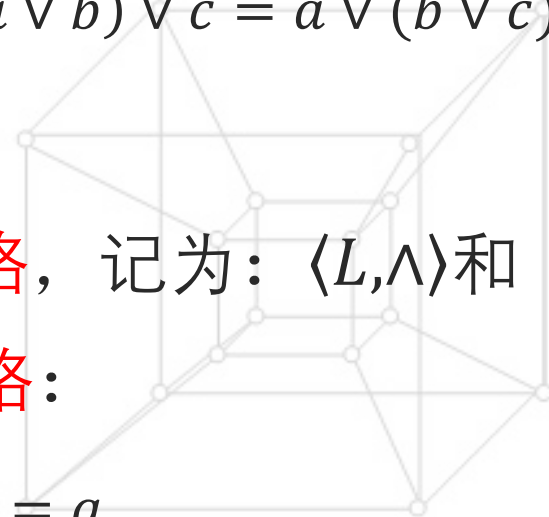




# 格导出的代数系统



- 若 $(L, \leq)$ 构成格，则称 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 为偏序格 $L$ 导出的代数系统
- $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  满足以下系统公理：
  - **Ax.1 交换律**:  $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$
  - **Ax.2 结合律**:  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
  - **Ax.3 幂等律**:  $a \wedge a = a, a \vee a = a$
- 满足上述三条公理的代数系统称为**半格**，记为： $\langle L, \wedge \rangle$ 和 $\langle L, \vee \rangle$ ；吸收律公理将两个半格统一为**格**：
  - **Ax.4 吸收律**:  $a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$





# 格中偏序的性质



■ **定理** (格的基本结构性质) : 设 $L$ 是格, 则

$\forall a, b \in L$ , 有:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

- **证明**: (1) 先证  $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$ : 由  $a \leq a$  和  $a \leq b$  可知  $a$  是  $\{a, b\}$  的下界, 因此  $a \leq a \wedge b$ ; 又因  $a \wedge b \leq a$ , 由反对称性得  $a \wedge b = a$ ; (2) 再证  $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$ : 根据吸收律和交换律, 有  $b = b \vee (a \wedge b)$ , 由  $a \wedge b = a$  和上式得  $b = b \vee a$ , 即  $a \vee b = b$ ; (3) 最后证  $a \vee b = b \Rightarrow a \leq b$ : 由  $a \leq a \vee b$  得  $a \leq a \vee b = b$ .  $\square$



# 代数格



- **定义 (代数格)** : 设  $\langle L, *, \circ \rangle$  是代数系统, 其中  $*$  和  $\circ$  是二元运算, 且满足 **交换律**、**结合律**、**吸收律**, 则称  $\langle L, *, \circ \rangle$  是 **代数格**。以下论证代数格与偏序格的等价性
- **引理1**: 代数格满足 **幂等律**:  $\forall a \in L, a * a = a, a \circ a = a$ 
  - **根据吸收律**:  $a = (a \circ (a * a)) = (a * (a \circ a)),$   
 $\therefore a * a = a * (a \circ (a * a)) = a, a \circ a = a \circ (a * (a \circ a)) = a$
- **引理2**:  $a \circ b = b$  当且仅当  $a * b = a$ 
  - $\Rightarrow$ : 若  $a \circ b = b$ , 则  $a * b = a * (a \circ b) = a$
  - $\Leftarrow$ : 若  $a * b = a$ , 则  $a \circ b = (a * b) \circ b = b \circ (b * a) = b$



# 代数格 (续)



- **引理3:** 设 $\langle L, *, \circ \rangle$ 是代数格, 定义 $L$ 上的关系 $R$ 如下:

$$\forall a, b \in L, aRb \Leftrightarrow a \circ b = b$$

则 $R$ 是偏序关系

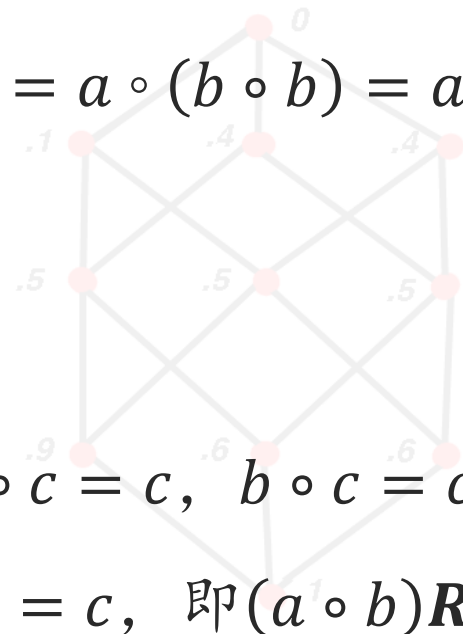
- **自反性:** 注意 $\circ$ 满足幂等律 (由引理1);
- **反对称性:** 若 $aRb$ 且 $bRa$ , 则 $a \circ b = b$ ,  $b \circ a = a$ ,  
但 $a \circ b = b \circ a$ ,  $\therefore a = b$ ;
- **传递性:** 若 $aRb, bRc$ , 则 $a \circ b = b$ ,  $b \circ c = c$ , 则 $a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$ , 即 $aRc$



# 代数格 (续)



- **引理4:** 偏序格中的**界**可由代数格中的**运算**体现
- $a \circ b$  是  $\{a, b\}$  的**上界**
  - 由引理1、3,  $a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b \therefore aR(a \circ b)$
  - 由引理1、3,  $b \circ (a \circ b) = (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b) = a \circ b \therefore bR(a \circ b)$
- $a \circ b$  又是  $\{a, b\}$  的**最小上界**
  - 对  $c \in L$ , 若  $c$  也是  $\{a, b\}$  的上界, 则  $a \circ c = c, b \circ c = c$
  - 于是:  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$ , 即  $(a \circ b)Rc$





# 代数格 (续)



- 注意：由引理2,  $a \circ b = b$  当且仅当  $a * b = a$ , 因此

$$\forall a, b \in L, aRb \Leftrightarrow a * b = a$$

- $a * b$  即  $\{a, b\}$  的下界

- $\because (a * b) * a = a * (a * b) = (a * a) * b = a * b$

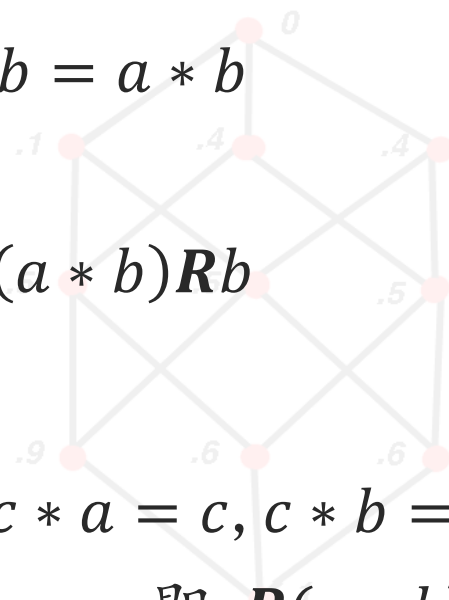
- $\therefore (a * b)Ra$

- $\because (a * b) * b = a * (b * b) = a * b \quad \therefore (a * b)Rb$

- $a * b$  即  $\{a, b\}$  的最大下界

- 任给  $c \in L$ , 若  $c$  也是  $\{a, b\}$  的下界, 则  $c * a = c, c * b = c$

- 于是:  $c * (a * b) = (c * a) * b = c * b = c$ , 即  $cR(a * b)$





# 偏序格与代数格的等价性



- $(L, R)$  即偏序格

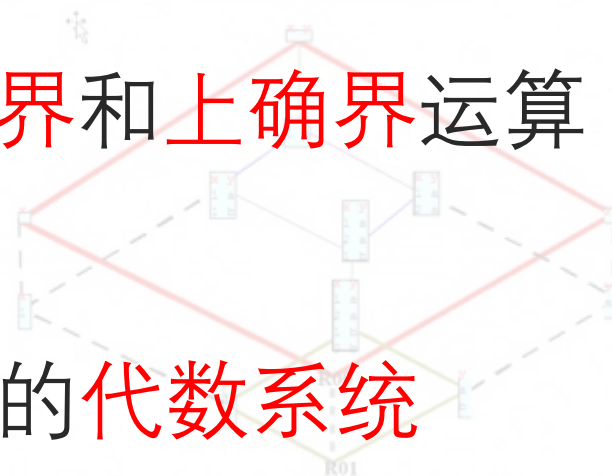
- $*$  和  $\circ$  即为偏序格中的求下确界和上确界运算

- 代数格  $\langle L, *, \circ \rangle$  就是  $(L, R)$  导出的代数系统

Boolean Algebra



Relational Lattice





# 偏序格与代数格的等价性 (续)



## ■ 偏序格与代数格的对应关系：

$(L, \leq)$

(偏序格:  $(L, \leq)$  是偏序集, 任意2个元素在  $L$  中皆存在上确界和下确界)

$\langle L, \wedge, \vee \rangle$

(格导出的代数系统, 即格公理:  $\wedge$  和  $\vee$  满足交换律、结合律、吸收律和幂等律等4个系统公理)

$\langle L, *, \circ \rangle$

(代数格: 二元运算  $*$  和  $\circ$  满足交换律、结合律和吸收律等3条代数运算律)



# 子格



- **子格** (sub lattice) 是格的子代数。设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是格，非空集合  $S \subseteq L$ ，若  $S$  关于  $L$  中的运算  $\wedge, \vee$  **仍构成格**，称  $\langle S, \wedge, \vee \rangle$  是  $L$  的 **子格**

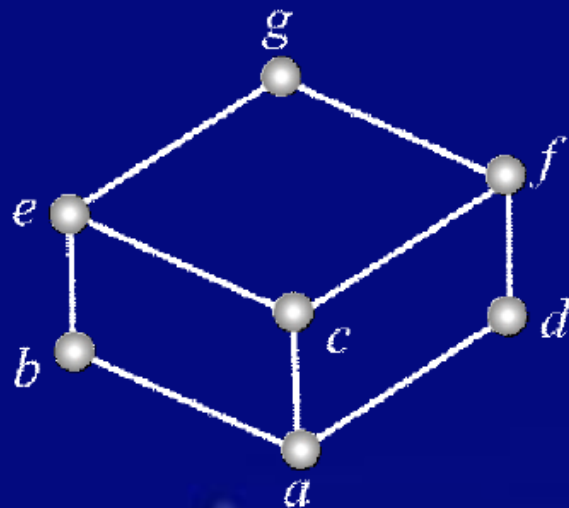
例 13.5 设格  $L$  如图 3 所示. 令

$$S_1 = \{a, e, f, g\}, S_2 = \{a, b, e, g\}$$

$S_1$  不是  $L$  的子格, 因为

$$e, f \in S_1 \text{ 但 } e \wedge f = c \notin S_1.$$

$S_2$  是  $L$  的子格.





# 格同态



- **定义** (**格同态**) : 设 $L_1$ 和 $L_2$ 是格, 函数 $f: L_1 \rightarrow L_2$ 若满足 $\forall a, b \in L_1$ ,

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

同时成立, 则称函数 $f$ 是格 $L_1$ 到格 $L_2$ 的**同态映射**, 简称格同态



# 格同态的保序性



■ **定理 (格同态保序)** : 设  $f$  是格  $L_1$  到  $L_2$  的映射,

○ (1) 若  $f$  为格同态映射, 则  $f$  **保序**, 即

$$(\forall x, y \in L_1)(x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y))$$

○ (2) 若  $f$  为 **双射**, 则  $f$  为 **格同构**: 其满足

$$(\forall x, y \in L_1)(x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq f(y))$$



# 格同态的保序性 (续)



例 设  $L_1 = \langle S_{12}, D \rangle$ ,  $L_2 = \langle S_{12}, \leq \rangle$  是格, 其中:  
 $S_{12}$  是 12 的所有正因子构成的集合,  
 $D$  为整除关系,  $\leq$  为通常数的小于或等于关系.  
令

$$f: S_{12} \rightarrow S_{12}, f(x) = x$$

$f$  是双射, 但不是格  $L_1$  到  $L_2$  的同构映射.

因为  $f(2) \leq f(3)$ , 但 2 不整除 3.

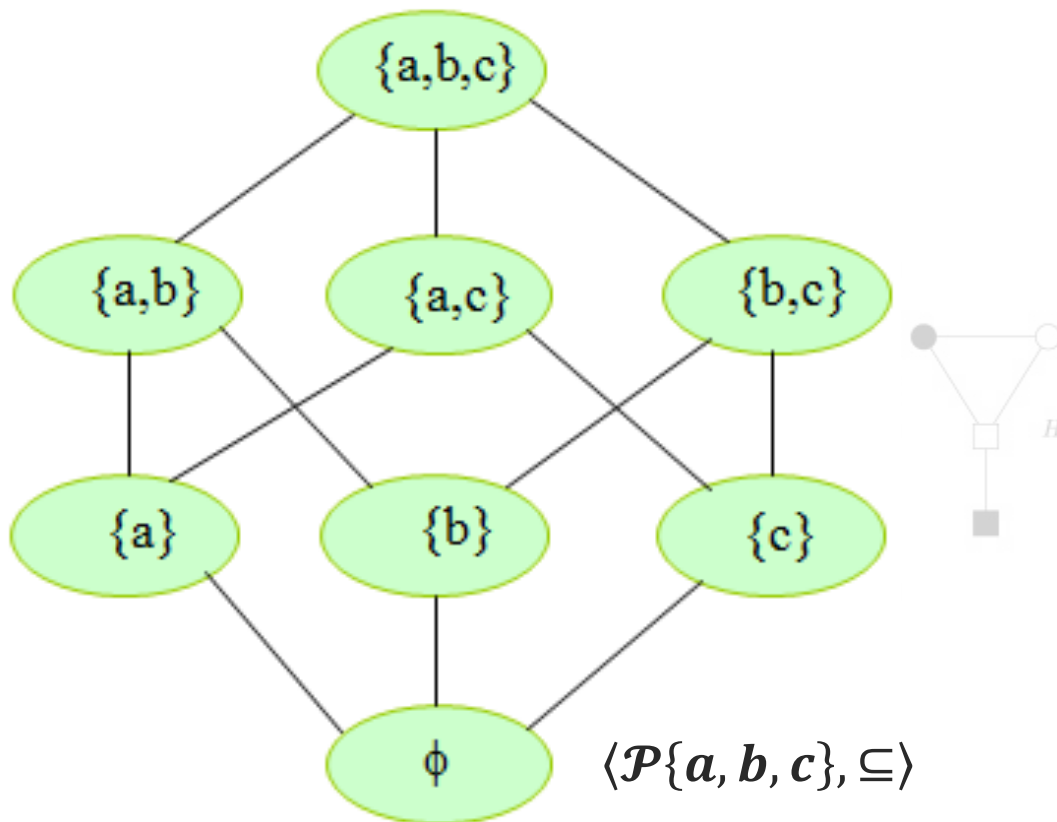
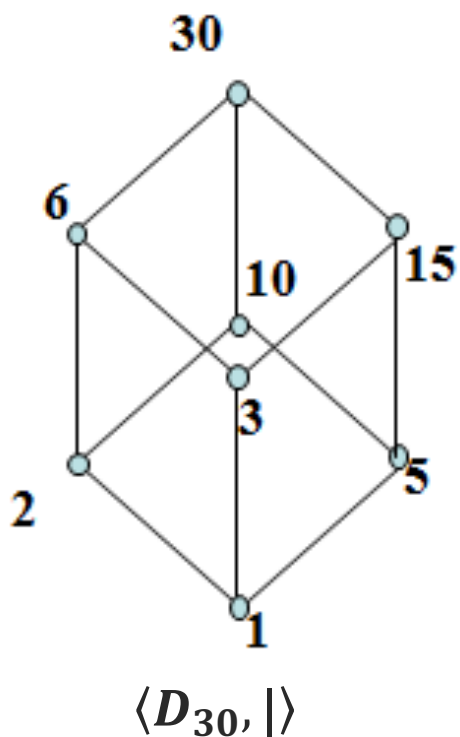
根据上述定理可知  $f$  不是同构映射



# 格同构的直观特征

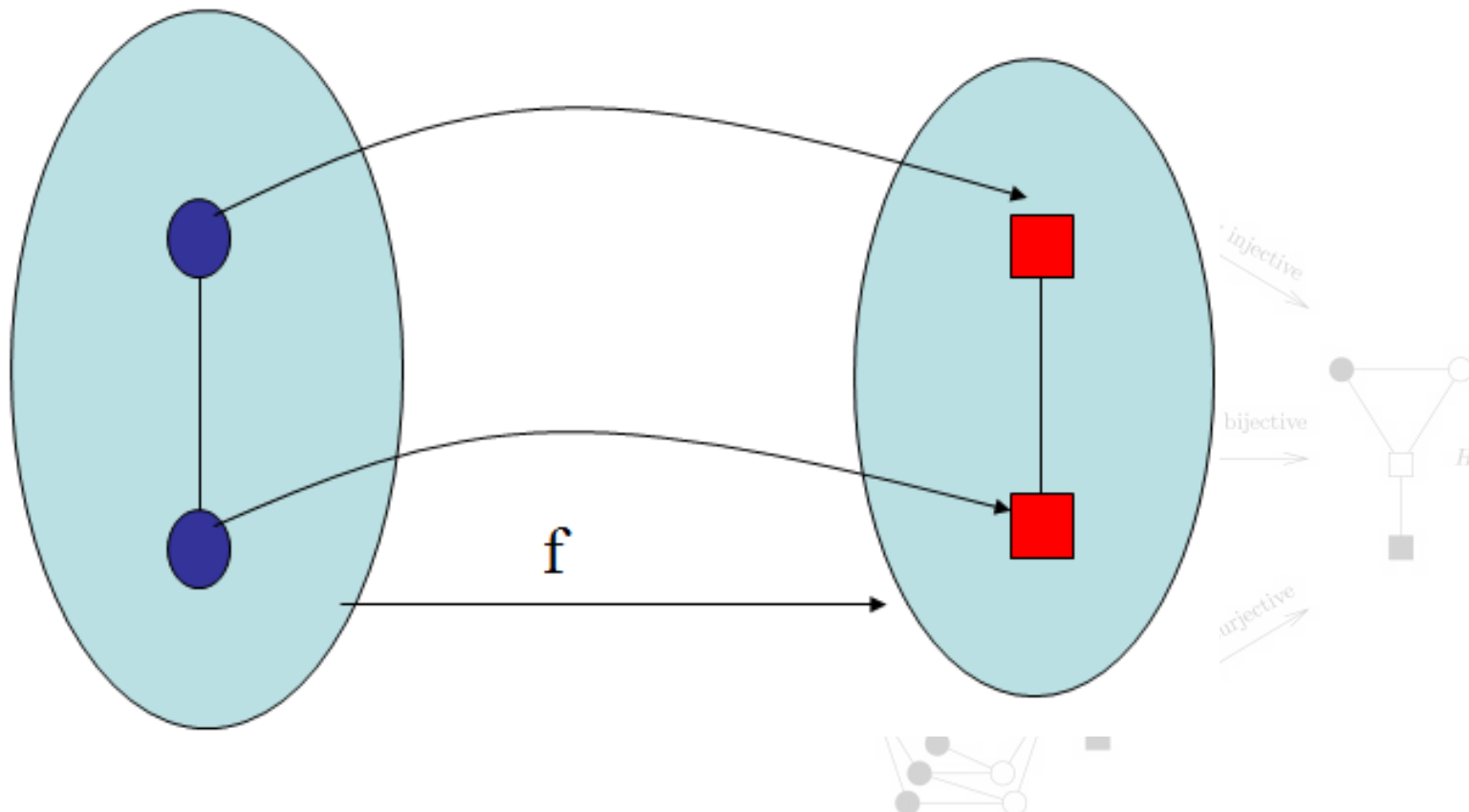


- 观察以下2个格的哈斯图：



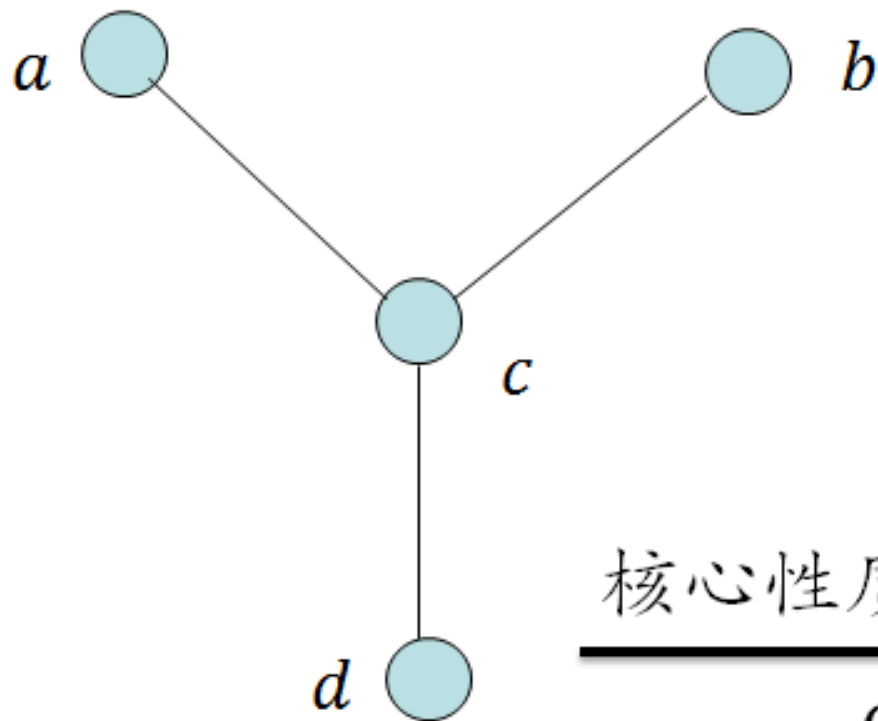


# 格同构的直观特征 (续)



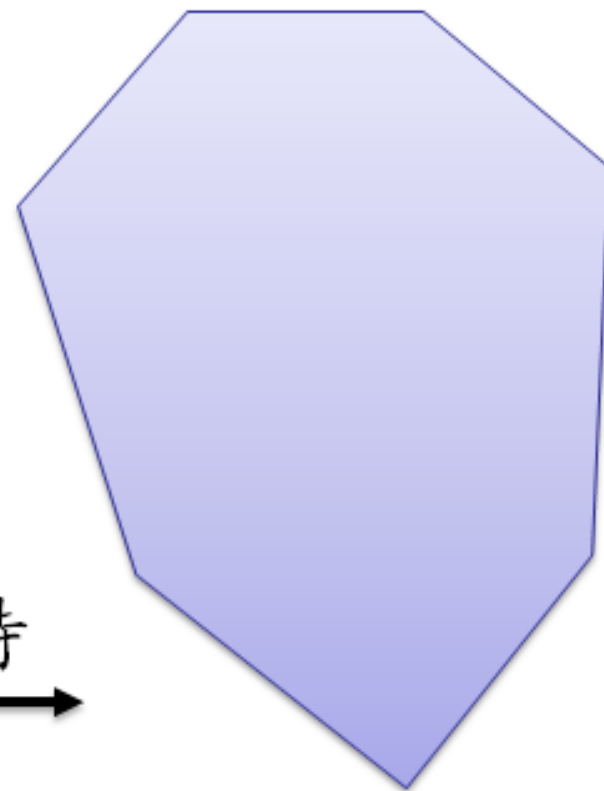


# 格同构的直观特征 (续)



核心性质保持

$f$

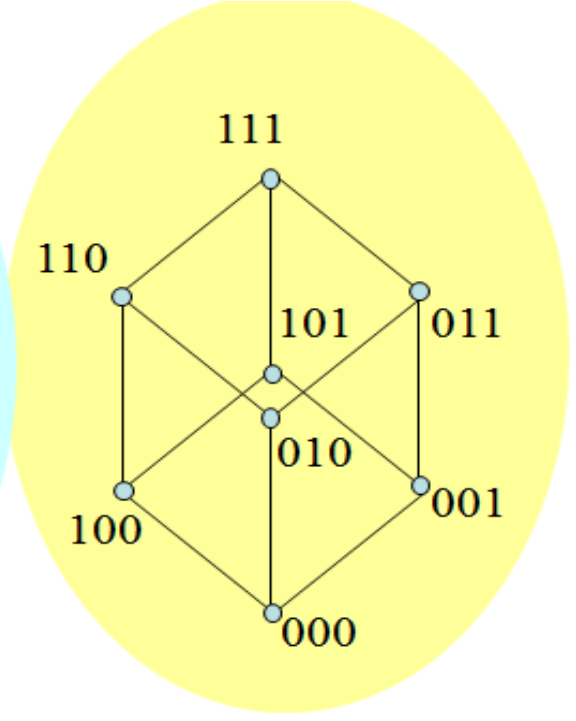
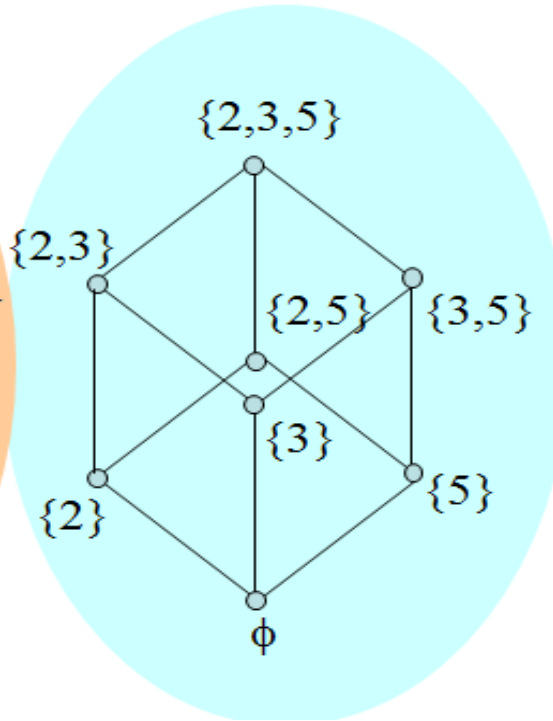
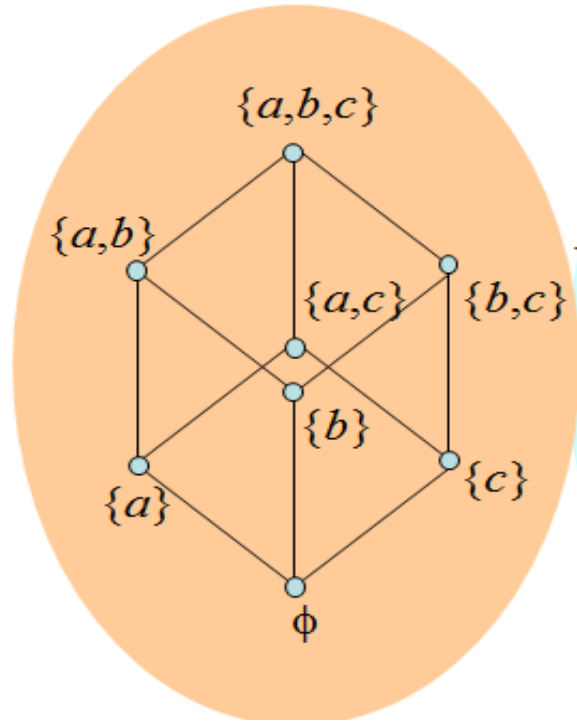




# 格同构的直观特征 (续)



- Iso  $\Rightarrow$  same
  - Morph  $\Rightarrow$  shape
- Isomorphic lattices have same Hasse diagrams' shape





# 几种典型的格

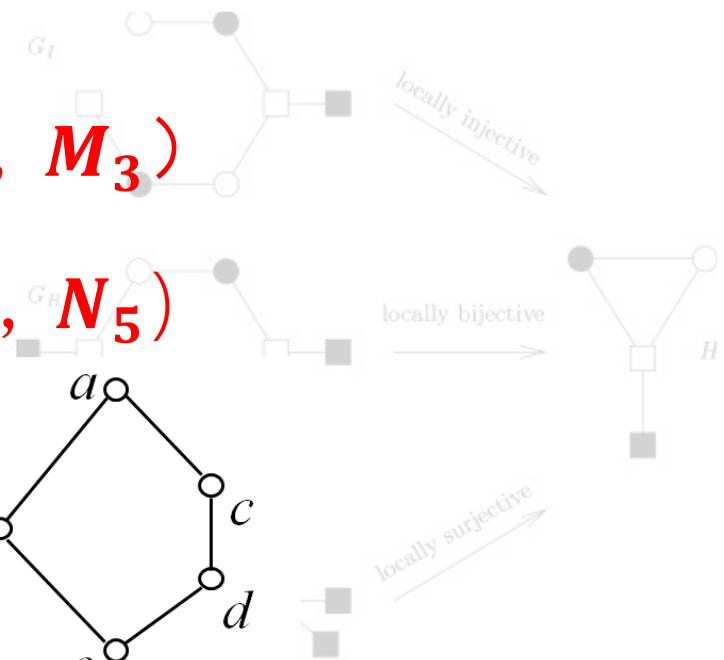
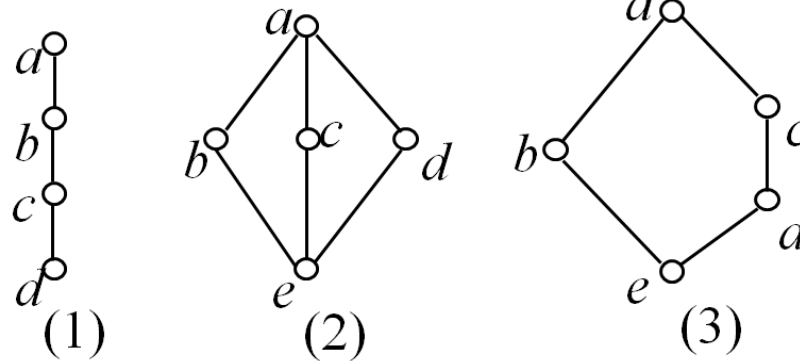


## ■ 定义 (三种特殊的格) :

○ (1) 链 (chain)

○ (2) 钻石格 (diamond lattice,  $M_3$ )

○ (3) 五角格 (pentagon lattice,  $N_5$ )





# 分配格



■ **定义** (**分配格**) : 设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  为格, 若

$\forall a, b, c \in L$ , 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称  $L$  为**分配格** (distributive lattice)



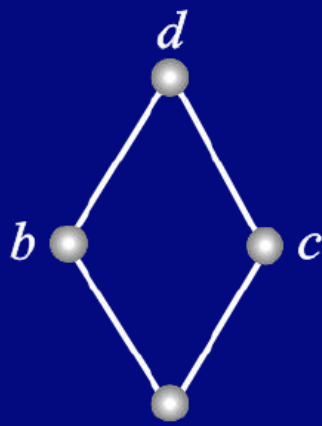
# 分配格 (续)



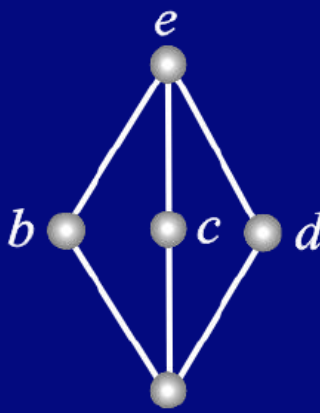
例 参见下图



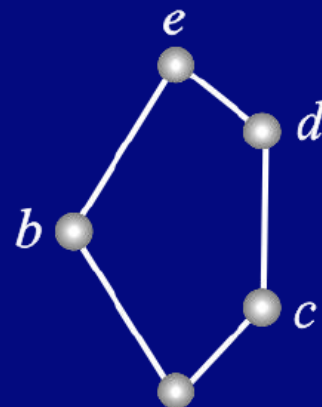
$L_1$



$L_2$



$L_3$



$L_4$

$L_1$  和  $L_2$  是分配格,  $L_3$  和  $L_4$  不是分配格.

在  $L_3$  中,  $b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b$ ,  $(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a$

在  $L_4$  中,  $c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c$ ,  $(c \vee b) \wedge (c \vee d) = e \wedge d = d$



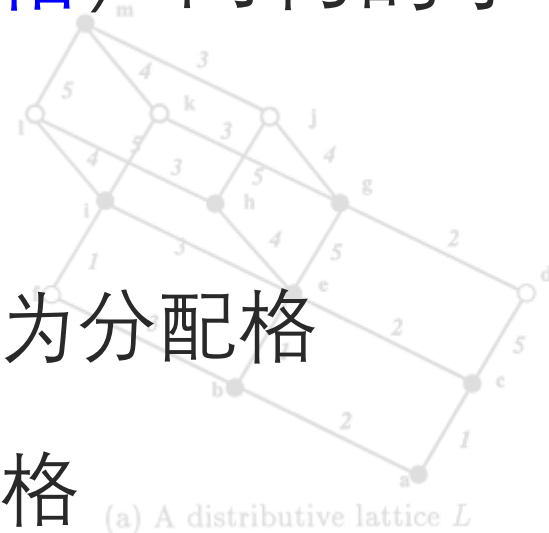
# 分配格的判定定理



- **定理**（**分配格判定定理一**）：设 $L$ 为格，则 $L$ 是分配格当且仅当 $L$ 不含有与 $M_3$ （**钻石格**）或 $N_5$ （**五角格**）同构的子格

- **推论**：

- (1) 小于五元的格皆为分配格
- (2) 任何链皆为分配格



(a) A distributive lattice  $L$



(b)  $M(L)$



# 分配格的判定定理 (续)



例 说明图 6 中的格是否为分配格, 为什么?

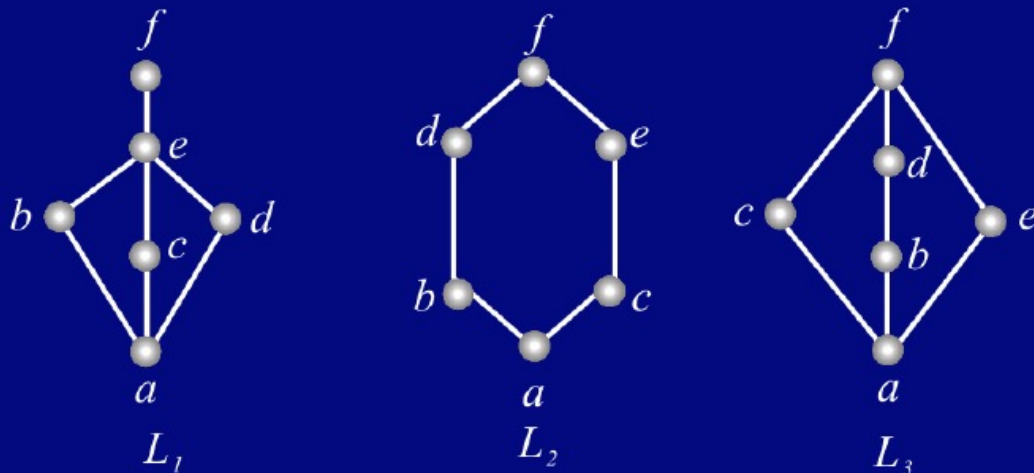


图 6

解  $L_1, L_2$  和  $L_3$  都不是分配格.

$\{a, b, c, d, e\}$  是  $L_1$  的子格, 并且同构于钻石格;

$\{a, b, c, e, f\}$  是  $L_2$  的子格, 并且同构于五角格;

$\{a, c, b, e, f\}$  是  $L_3$  的子格, 也同构于钻石格.



# 分配格的判定定理（续）



■ **定理（分配格判定定理二）**：设 $L$ 为格，

则 $L$ 是分配格当且仅当

$$(\forall a, b, c \in L)(a \wedge b = a \wedge c \text{ 且 } a \vee b = a \vee c) \\ \rightarrow b = c$$

以下证明必要性，充分性的证明留作课后思考



# 分配格的判定定理 (续)



证 必要性.  $\forall a, b, c \in L$ , 有

$$b = b \vee (a \wedge b)$$

(吸收律, 交换律)

$$= b \vee (a \wedge c)$$

(已知条件代入)

$$= (b \vee a) \wedge (b \vee c)$$

(分配律)

$$= (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

(已知条件代入, 交换律)

$$= (a \wedge b) \vee c$$

(分配律)

$$= (a \wedge c) \vee c$$

(已知条件代入)

$$= c$$

(交换律, 吸收律)



# 分配格的判定定理 (续)

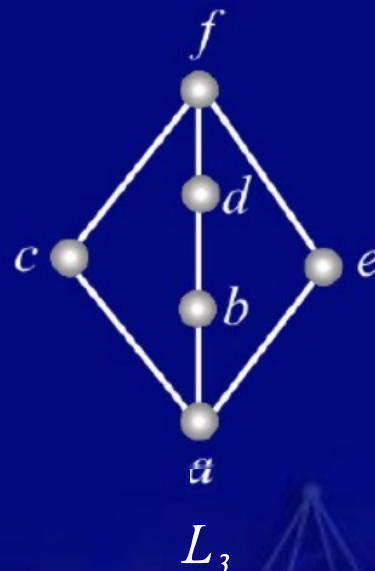
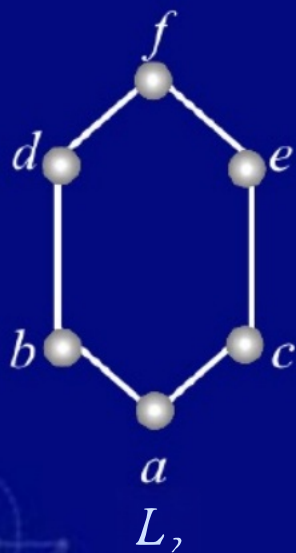


例 以下三个格都不是分配格.

在  $L_1$  中有  $b \vee c = b \vee d, b \wedge c = b \wedge d$ , 但  $c \neq d$

在  $L_2$  中有  $b \wedge c = b \wedge e, b \vee c = b \vee e$ , 但  $c \neq e$

在  $L_3$  中有  $c \wedge b = c \wedge d, c \vee b = c \vee d$ , 但  $b \neq d$





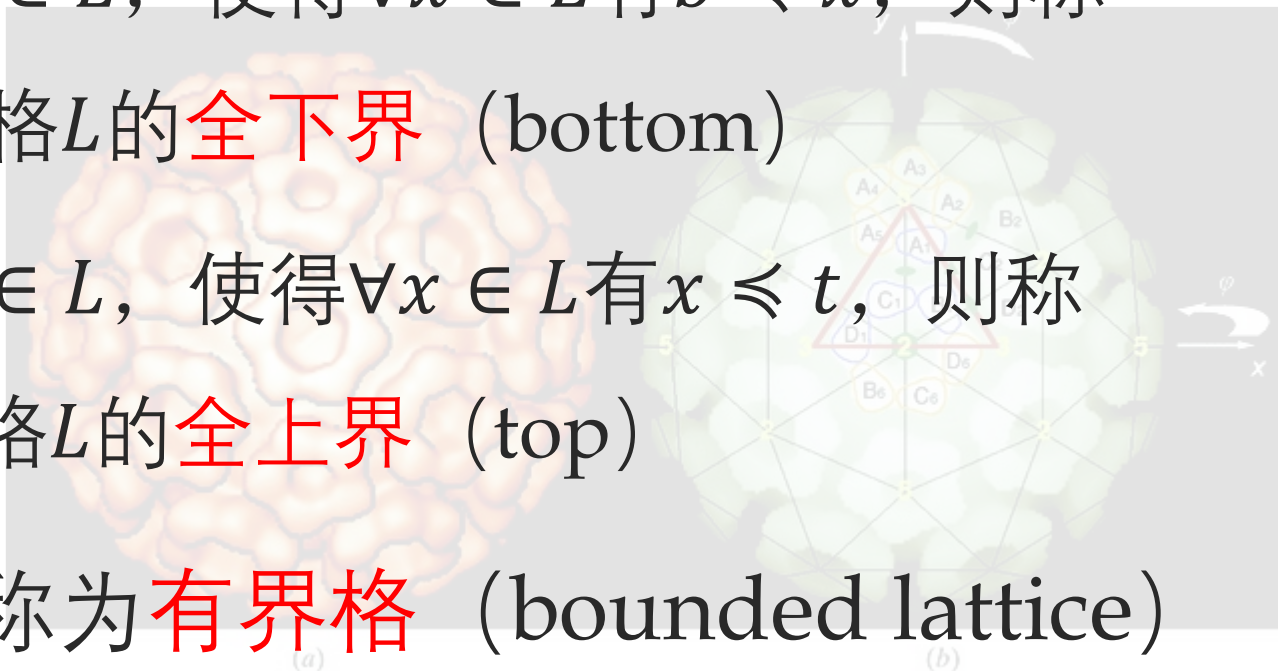
# 有界格



■ **定义**（**有界格**）：设 $L$ 为格，

- 若存在 $b \in L$ ，使得 $\forall x \in L$ 有 $b \leq x$ ，则称元素 $b$ 是格 $L$ 的**全下界**（bottom）
- 若存在 $t \in L$ ，使得 $\forall x \in L$ 有 $x \leq t$ ，则称元素 $t$ 是格 $L$ 的**全上界**（top）

此时格 $L$ 称为**有界格**（bounded lattice）





# 有界格 (续)



## ■ 注意:

- 若格 $L$ 中存在全下界或全上界, 则一定**唯一**
- 一般将格 $L$ 的全下界记为**0**, 全上界记为**1**
- 有界格 $L$ 一般记为 $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
- 有界格 $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ 还满足**同一律**, 即 $\forall a \in L$ :

$$a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, a \vee \mathbf{0} = a; a \wedge \mathbf{1} = a, a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$$



# 有界格 (续)



## ■ 事实:

- 有限格皆为有界格, 设  $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 则

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$  是  $L$  的全下界

$a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$  是  $L$  的全上界

- $0$  是关于  $\wedge$  运算的零元,  $\vee$  运算的单位元;  $1$  是关于  $\vee$  运算的零元,  $\wedge$  运算的单位元
- 求涉及有界格的命题之对偶命题, 还应将全下界与全上界对换



# 有补格



■ **定义**（**有界格的补元**）：设  $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$  为

有界格，若对  $a \in L$  存在  $b \in L$  使得

$$a \wedge b = \mathbf{0} \text{ 且 } a \vee b = \mathbf{1}$$

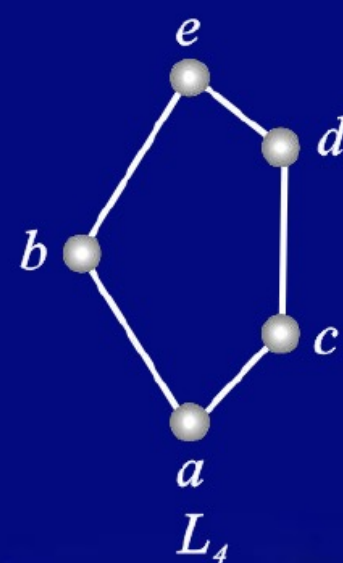
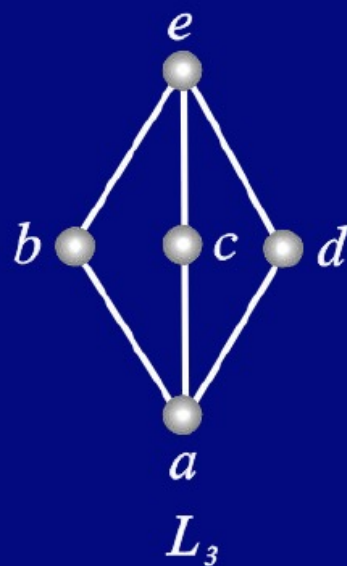
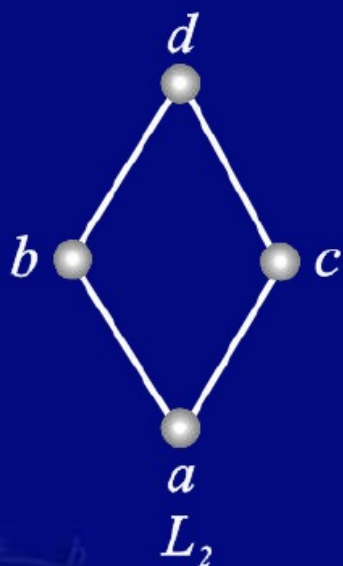
成立，则称元素  $b$  是  $a$  的**补元** (complement)



# 有补格 (续)



例 考虑下图中的四个格. 针对不同的元素, 求出所有的补元.





# 有补格 (续)



■ **定理** (有界分配格的补元唯一) : 设  $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$  为有界分配格, 若  $a \in L$  存在补元, 则其补元**唯一**

■ **证明**: 假设  $b, c$  皆为  $a$  之补元, 则有:

$$a \vee c = \mathbf{1}, a \wedge c = \mathbf{0}; a \vee b = \mathbf{1}, a \wedge b = \mathbf{0}$$

由于全上界和全下界唯一, 从而有  $a \vee c = a \vee b$ ,  
 $a \wedge c = a \wedge b$ ; 由于  $L$  是分配格, 故得  $b = c$ .  $\square$



# 有补格 (续)



## ■ 事实:

- 任何有界格的全上界 $1$ 和全下界 $0$ 互补
- 对于一般元素, 可能存在补元, 也可能不存在补元
- 补元若存在, 则可能唯一, 也可能有多个
- 对于有界分配格, 补元若存在则唯一



# 有补格（续）



- **定义**（**有补格**）：设  $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$  为有界格，若  $L$  中**所有元素**皆存在补元，则称  $L$  为**有补格**（complemented lattice）
- **例**：钻石格  $M_3$  和五角格  $N_5$  皆为有补格



# 布尔代数引论



- 布尔代数是一种代数系统，与格一样，其也有两种定义方式，本引论中仅看其一：
- 定义（布尔格）：如果一个格为有补分配格，则称其为布尔格，或称布尔代数 (Boolean algebra)，可记为  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$



# 布尔代数之例



例 设

$$S_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$$

是 110 的正因子集合,

gcd 表示求最大公约数的运算,

lcm 表示求最小公倍数的运算,

问  $\langle S_{110}, \text{gcd}, \text{lcm} \rangle$  是否构成布尔代数? 为什么?



# 布尔代数之例



解 (1) 验证  $\langle S_{110}, \gcd, \text{lcm} \rangle$  是格

容易验证  $\gcd$  和  $\text{lcm}$  在  $S_{110}$  上封闭

$$\gcd(x, y) = \gcd(y, x) \quad (\text{交换律})$$

$$\text{lcm}(x, y) = \text{lcm}(y, x)$$

$$\gcd(\gcd(x, y), z) = \gcd(x, \gcd(y, z)) \quad (\text{结合律})$$

$$\text{lcm}(\text{lcm}(x, y), z) = \text{lcm}(x, \text{lcm}(y, z))$$

$$\gcd(x, \text{lcm}(x, y)) = x \quad (\text{吸收律})$$

$$\text{lcm}(x, \gcd(x, y)) = x$$

因此,  $\langle S_{110}, \gcd, \text{lcm} \rangle$  构成格.



# 布尔代数之例 (续)



(2) 验证它是分配格.

易验证  $\forall x, y, z \in S_{110}$  有

$$\gcd(x, \text{lcm}(y, z)) = \text{lcm}(\gcd(x, y), \gcd(x, z))$$

(3) 验证它是有补格

1 作为  $S_{110}$  中的全下界, 110 为全上界,

1 和 110 互为补元, 2 和 55 互为补元,

5 和 22 互为补元, 10 和 11 互为补元,

从而证明了  $\langle S_{110}, \gcd, \text{lcm} \rangle$  为布尔代数.



# 布尔代数之例 (续)



例 设  $B$  为任意集合, 证明  $B$  的幂集格  $\langle P(B), \cap, \cup, \sim, \emptyset, B \rangle$  构成布尔代数, 称为集合代数.

证  $P(B)$  关于  $\cap$  和  $\cup$  构成格, 因为  $\cap$  和  $\cup$  运算满足交换律, 结合律和吸收律.

由于  $\cap$  和  $\cup$  互相可分配, 因此  $P(B)$  是分配格.

全下界是空集  $\emptyset$ , 全上界是  $B$ .

根据绝对补的定义, 取全集为  $B$ ,  $\forall x \in P(B)$ ,  $\sim x$  是  $x$  的补元. 从而证明  $P(B)$  是有补分配格, 即布尔代数.



# 本次课后作业



- 教材内容：[屈婉玲] 11.1, 11.2节
- 课后习题：
  - Problem Set 21
- 提交时间：5月13日 10:00 前