



离散数学

Discrete Mathematics

第二十三讲：图论导引

吴楠

南京大学计算机学院

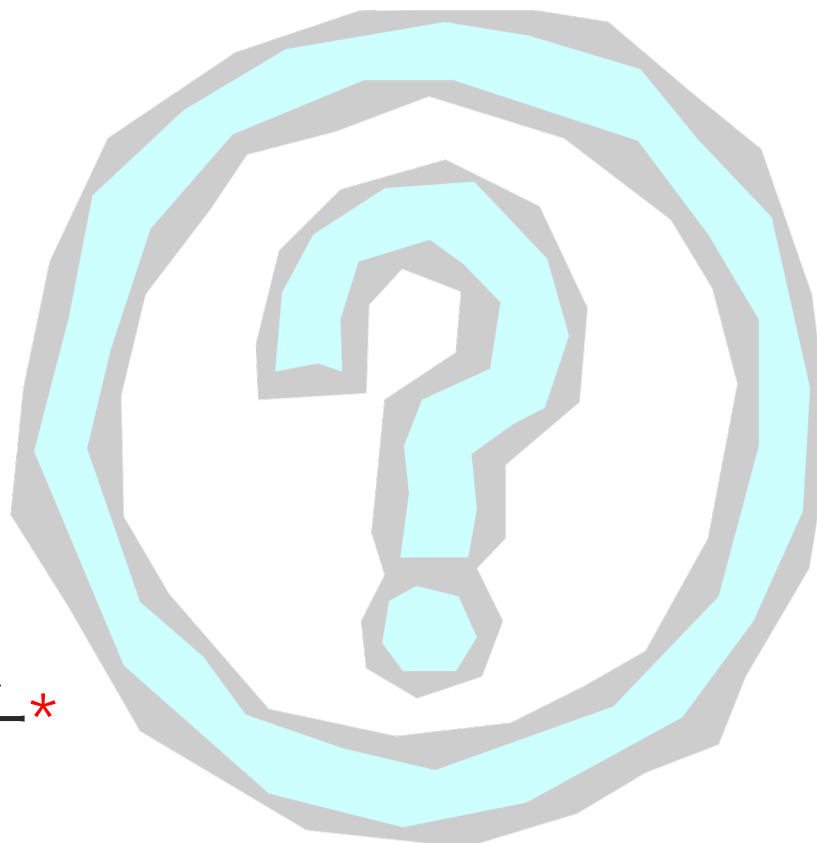
2025 年 5 月 13 日



前情提要



- 布尔格
- 布尔代数
- 布尔代数的性质
- 布尔代数的同态
- 有限布尔代数
- 数字逻辑电路设计*
- 布尔代数与信息论*





本讲主要内容



- 引子：图论在计算机科学中的应用
- 图的定义、表示与术语
- 图的矩阵表示（**自学部分**）
- 子图与图同构
- 图的基本运算
- 图模型及其应用
- 图的通路与回路

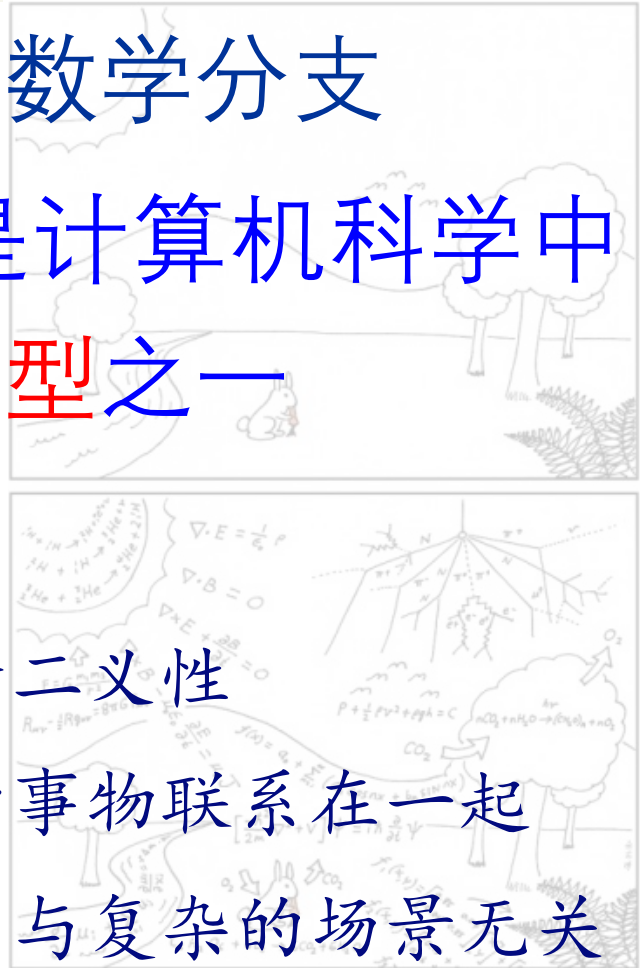




图论在计算机科学中的应用



- **图论**：以图为研究对象的数学分支
- 为什么要研究图论？图是计算机科学中最重要、最常用的**数学模型**之一
- 数学模型的作用：
 - 精确、定量地描述问题，去除二义性
 - 将本质相同（但表象不同）的事物联系在一起
 - 利用理论结果准确求解问题，与复杂的场景无关



This is how scientists see the world.

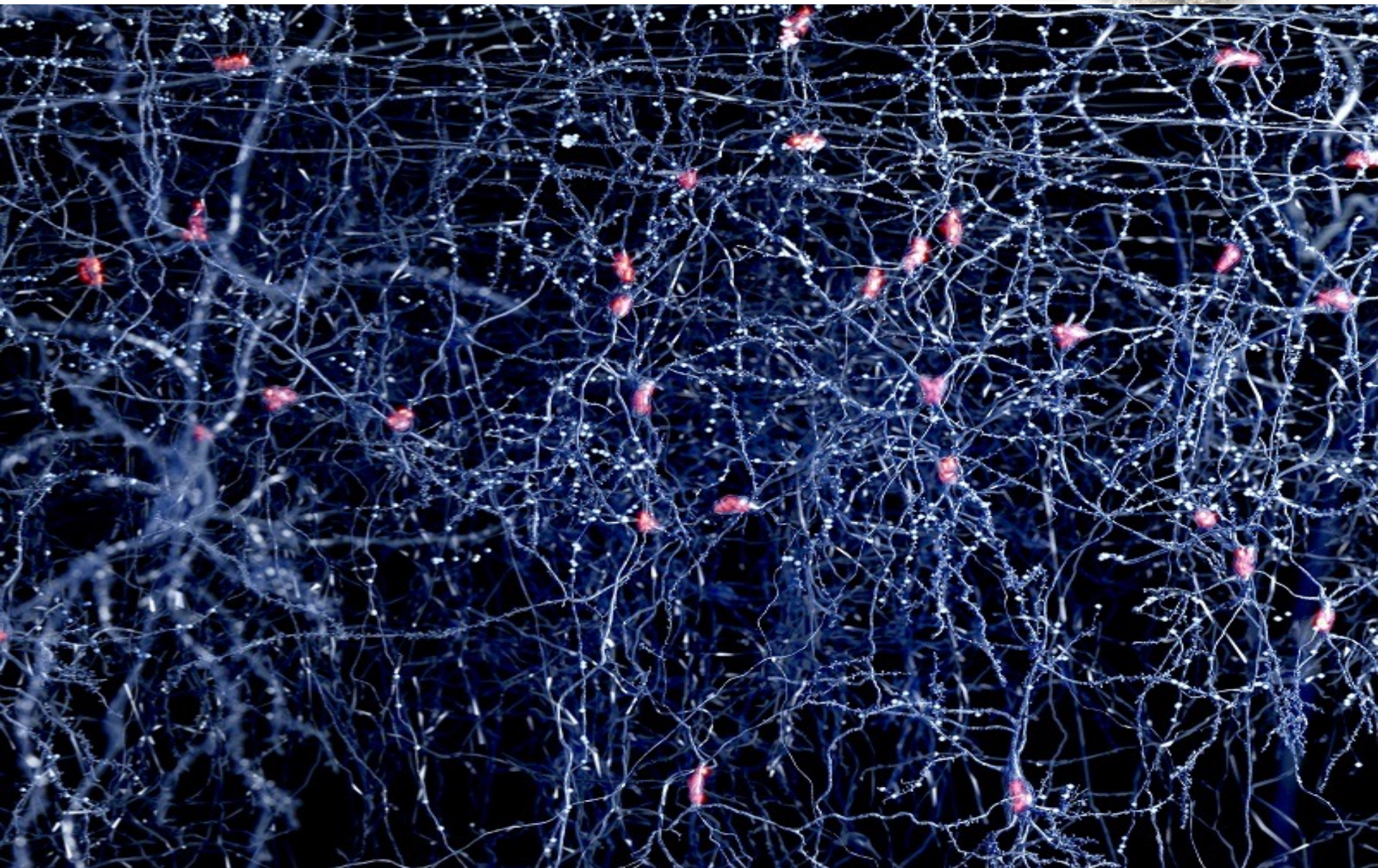


神经元 (neuron)





神经元在人类大脑中的连接



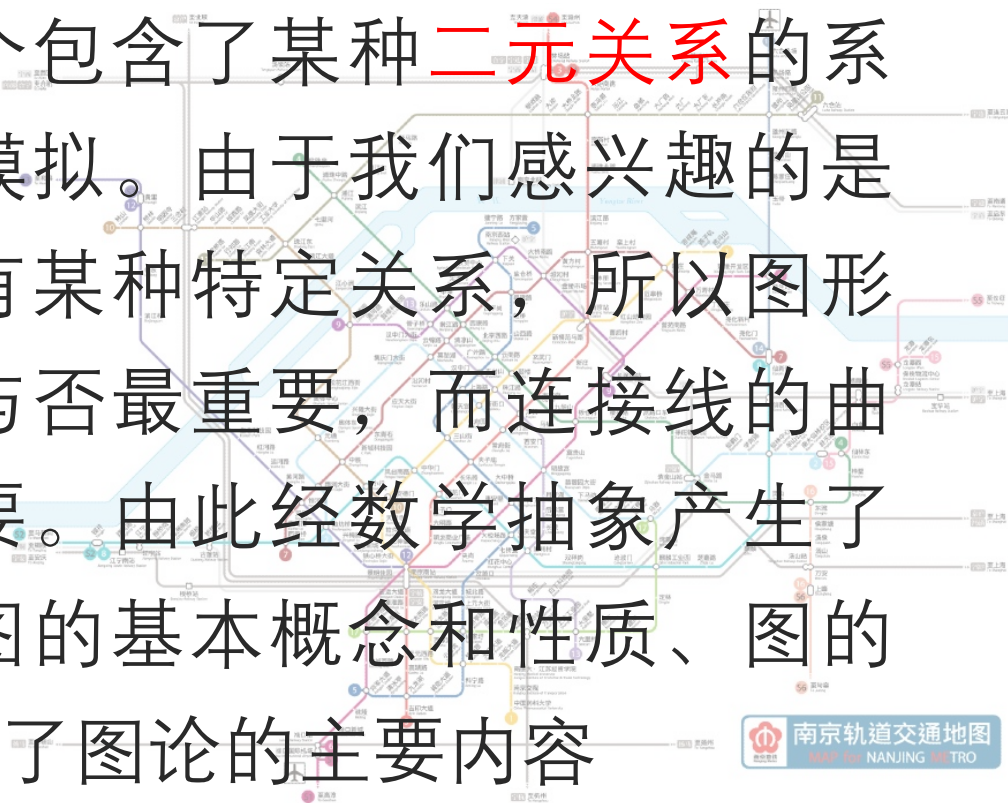


图论在计算机科学中的应用 (续)



■ 可以抽象为图的现实元素

- 事实上，任何一个包含了某种二元关系的系统都可以用图来模拟。由于我们感兴趣的是两对象之间是否有某种特定关系，所以图形中两点之间连接与否最重要，而连接线的曲直长短则无关紧要。由此经数学抽象产生了图的概念。研究图的基本概念和性质、图的理论及其应用构成了图论的主要内容

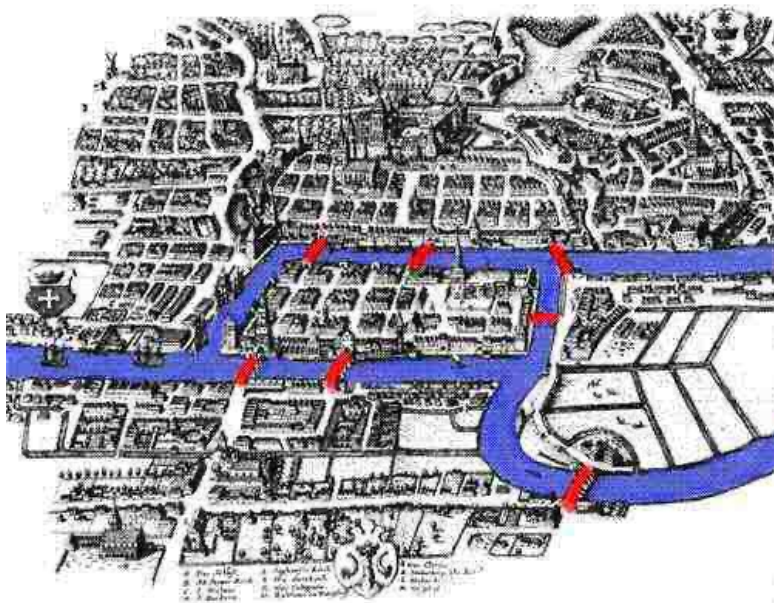




图论在计算机科学中的应用 (续)



- 图论的诞生时期 (1736—1850s) :
 - 1736 年 Euler 成功解决了著名的 Seven Bridges Problem of Königsberg: 欧拉图

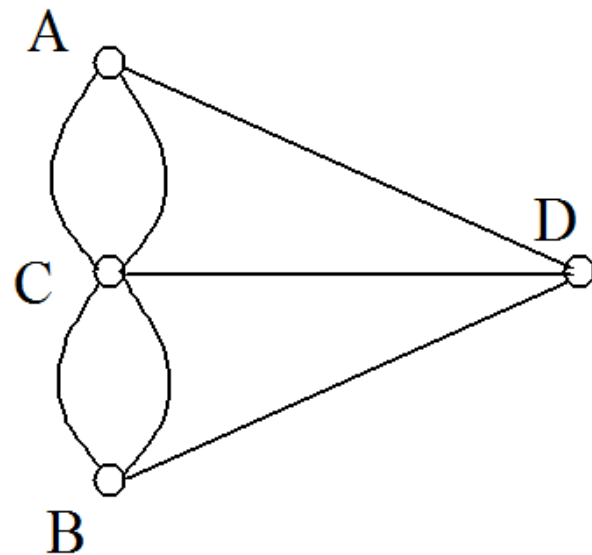
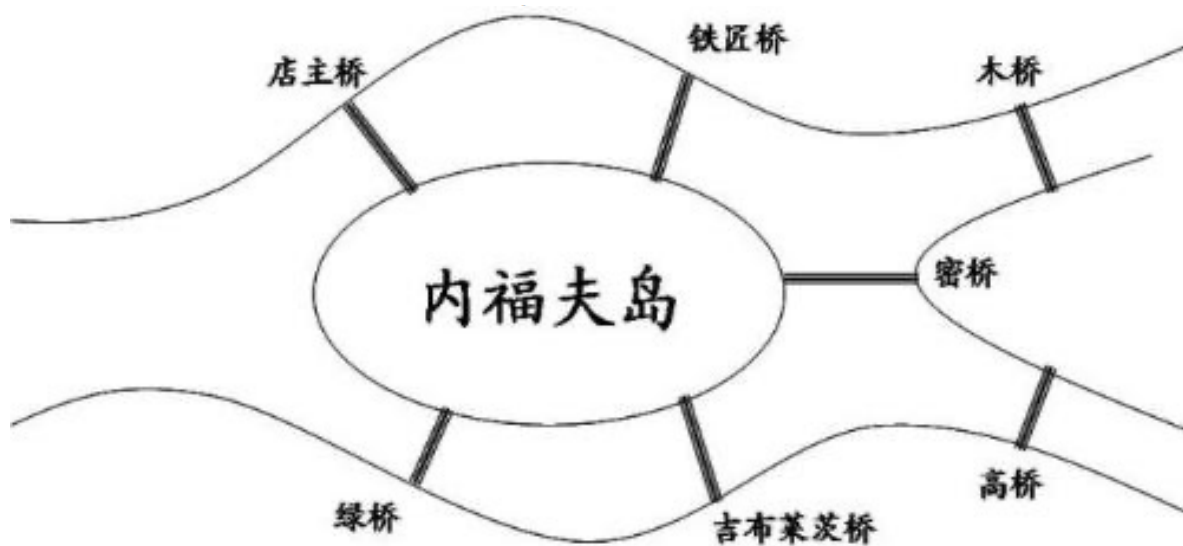




图论在计算机科学中的应用 (续)



■ Seven Bridges Problem of Königsberg

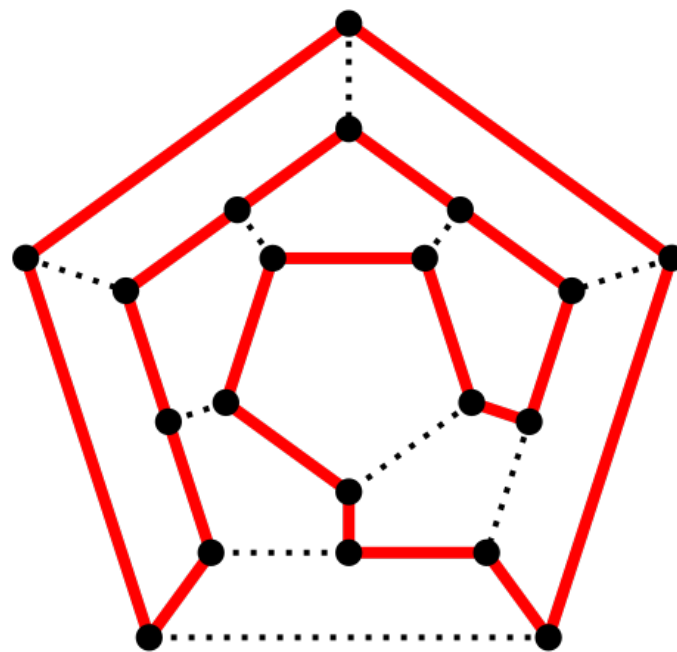
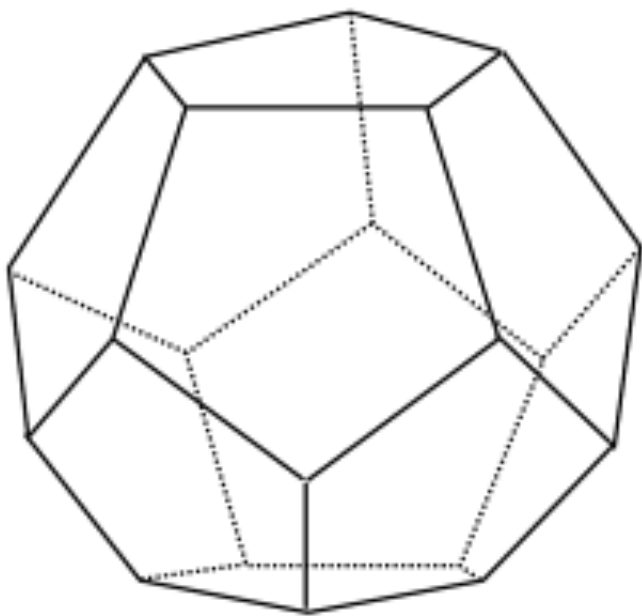




图论在计算机科学中的应用 (续)



- 图论的发展时期 (1850s – 1936) :
 - 环游世界问题 (1856) : 哈密顿回路





图论在计算机科学中的应用 (续)



- 图论的发展时期 (1850s – 1936) :
 - 四色问题 (1852)

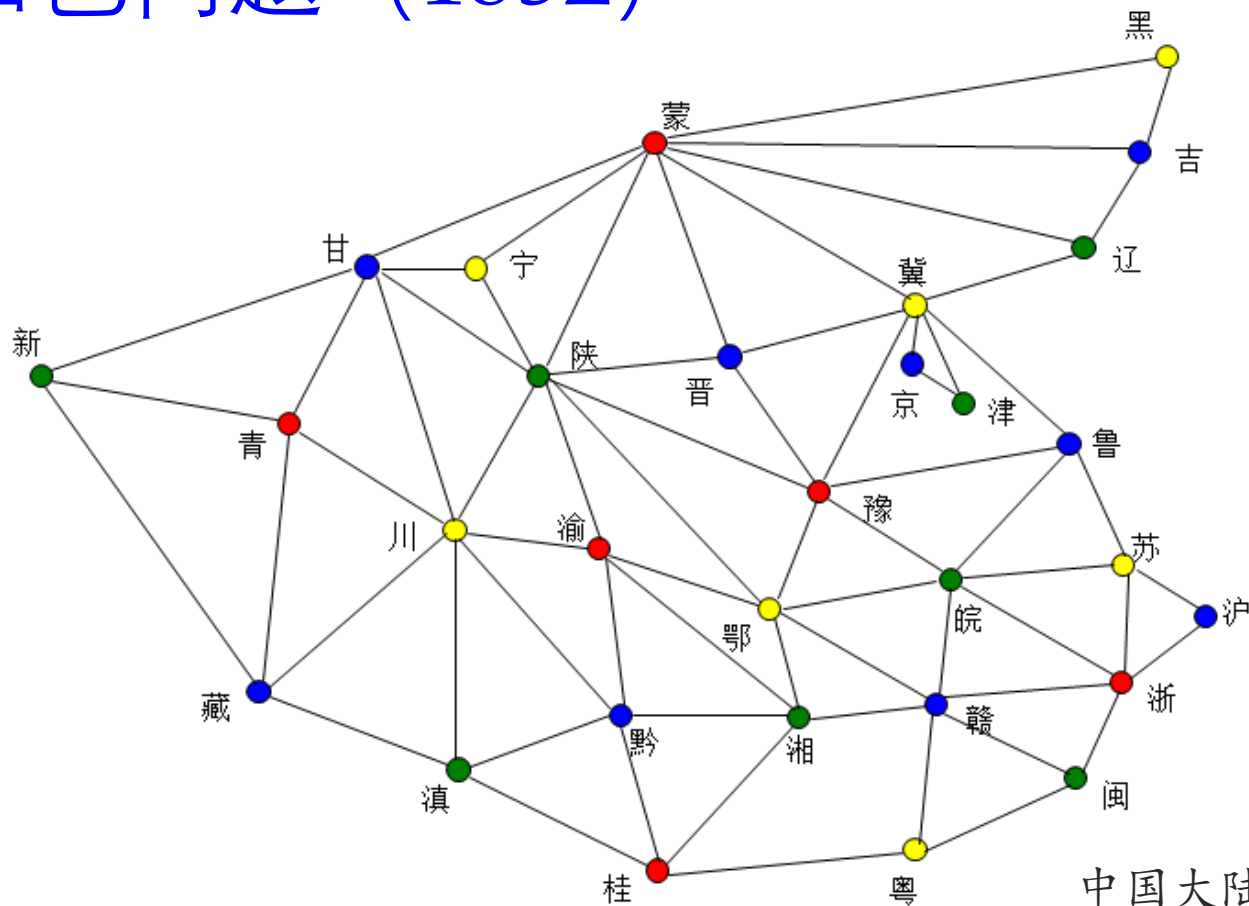




图论在计算机科学中的应用 (续)



■ 四色问题 (1852)



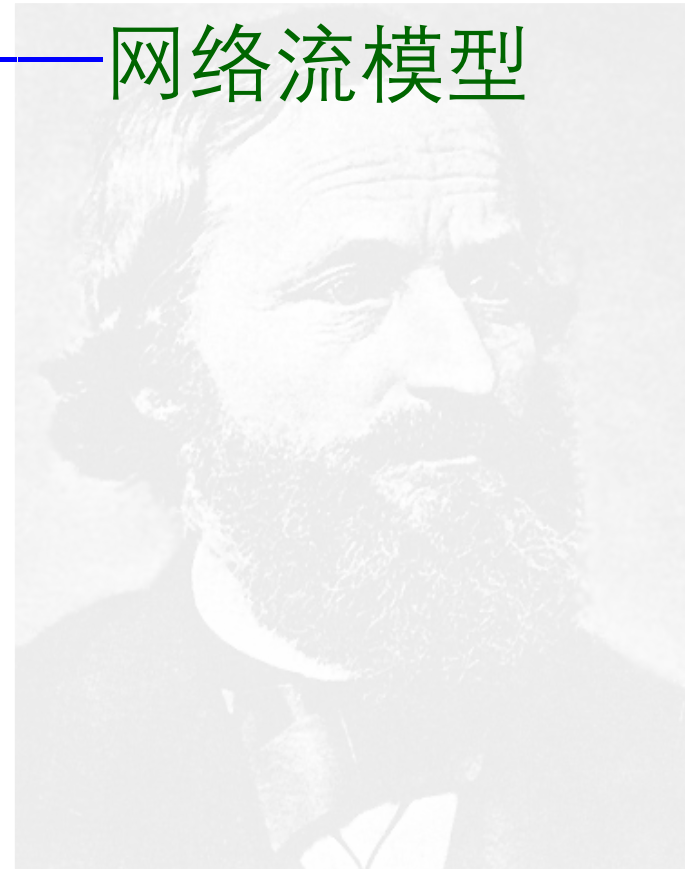
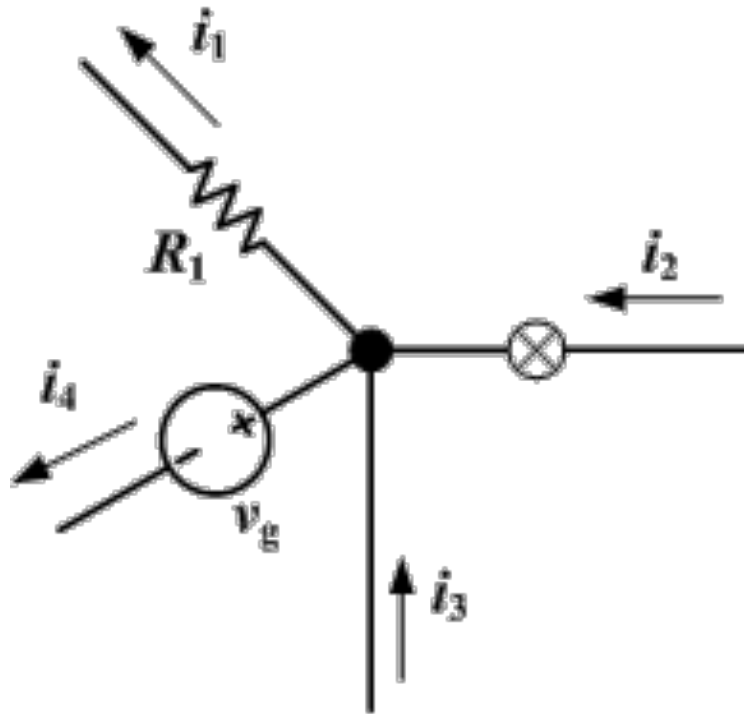
中国大陆省级行政区着色图



图论在计算机科学中的应用 (续)



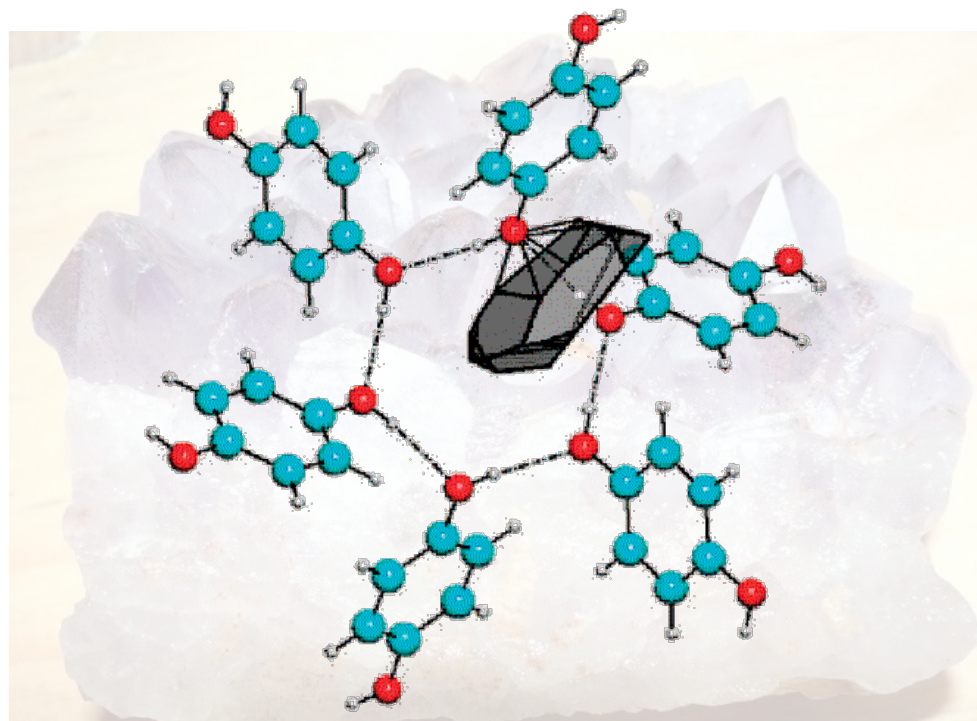
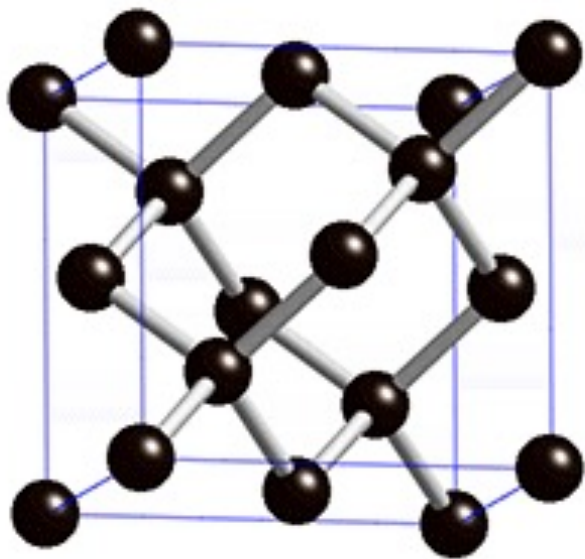
- 图论的发展时期 (1850s – 1936) :
 - Kirchhoff定律 (1847) ——网络流模型





图论在计算机科学中的应用 (续)

- 图论的发展时期 (1850s – 1936) :
 - 晶体学的发展 (1900s) —— 周期图与群

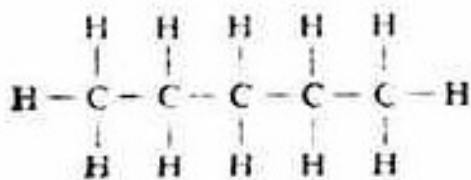




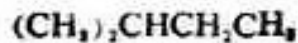
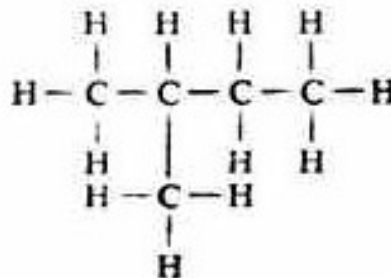
图论在计算机科学中的应用 (续)



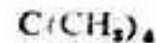
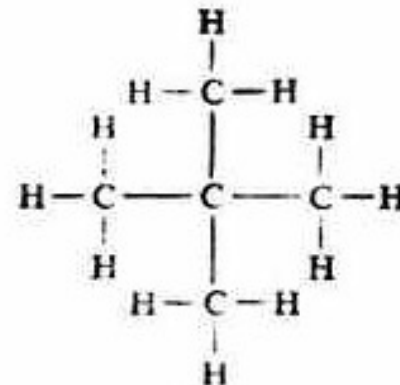
- 图论的发展时期 (1850s – 1936) :
 - 同分异构体结构 (Cayley, 1857) —— 树的概念



正戊烷
熔点 -130°C
沸点 36.1°C



异戊烷
熔点 -160°C
沸点 28°C



新戊烷
熔点 -17°C
沸点 9.5°C



图论在计算机科学中的应用（续）



- 图论的发展时期（1850s — 1936）：
 - 1936年匈牙利数学家哥尼格（D. König）写出了第一本图论专著《有限图与无限图的理论》（Theory of Finite and Infinite Graphs），标志着图论作为一门独立的学科正式诞生



图论在计算机科学中的应用 (续)



■ 图论的应用成熟时期 (1936—) :

- 输电网络
- 交通网络
- 电路设计
- 数据结构
- 社会关系
- 计算机科学、物理、化学、生命科学、运筹学、经济学、管理科学等

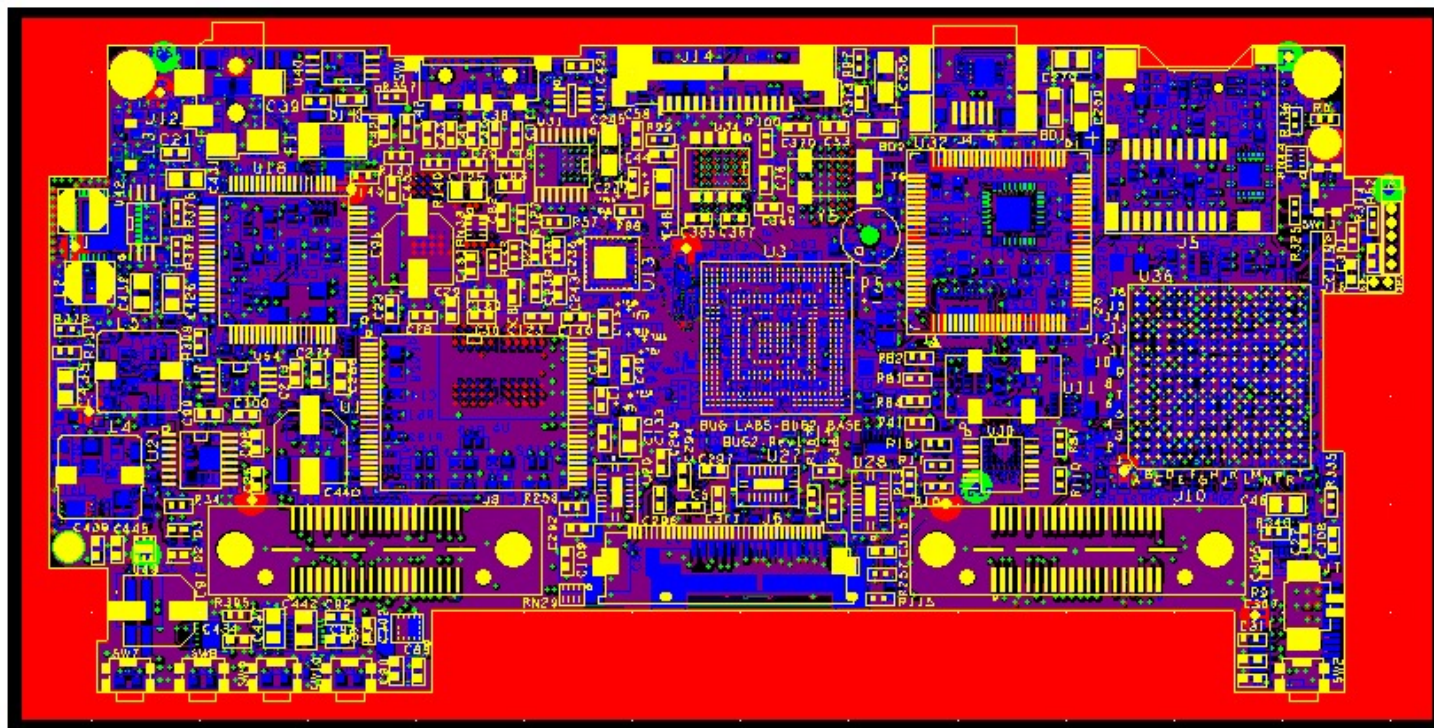




图论在计算机科学中的应用（续）



- 图论的应用成熟时期（1936—）：
 - 平面图与印刷电路板设计——平面图

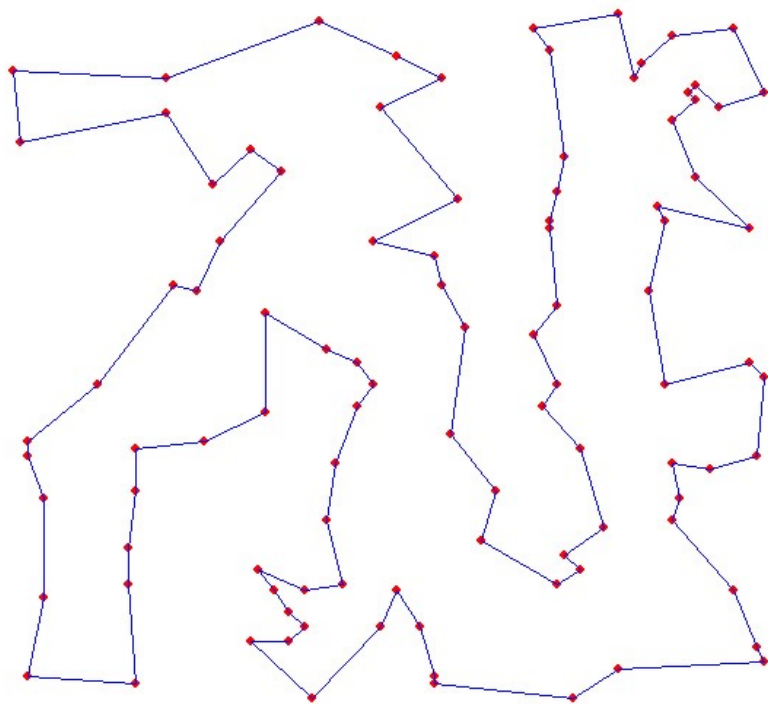




图论在计算机科学中的应用 (续)



- 图论的应用成熟时期 (1936—) :
 - 旅行商问题 (TSP)





图论在计算机科学中的应用 (续)

- 图论的应用成熟时期 (1936—) :
 - 网络运输优化问题——图与网络优化

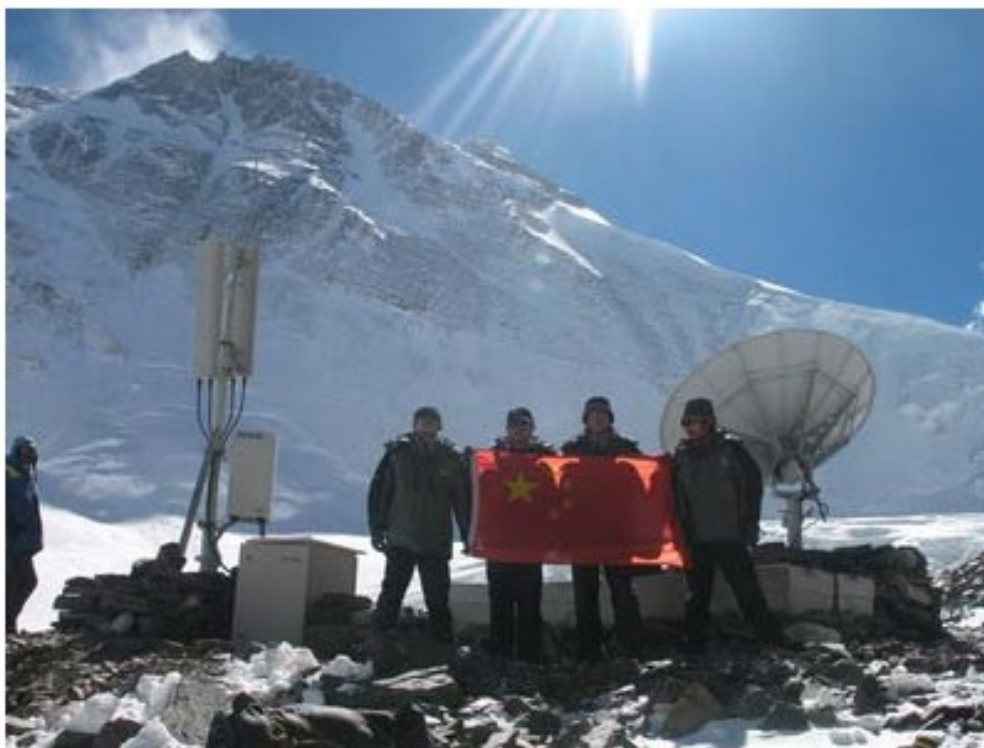




图论在计算机科学中的应用 (续)



- 图论的应用成熟时期 (1936—) :
 - 通信网络与最优通信编码问题——编码图





图论在计算机科学中的应用（续）



- 图论的应用成熟时期（1936—）：
 - 互联网信息检索技术（e.g. Page Rank）

[Shopping](#) [Gmail](#) [more](#) ▼

wunan.nju@gmail.com

Google

[Advanced Search](#)
[Language Tools](#)

Google Search

I'm Feeling Lucky

[Advertising Programs](#) [Business Solutions](#) [About Google](#) [Go to Google China](#)

© 2010 - [Privacy](#)



图的定义与表示



- 图论中的“**图**(graph)”是一种抽象的模型，它与几何图形不同，位置、大小、线形均无意义，有意义的只是那些点以及点之间的边
- 在数学上，图可定义为一个三元组：

$$G = \langle V, E, \gamma \rangle$$

V 为点集， **E** 为边集， **γ** 为边与点的关联关系



图的定义与表示 (续)



定义： 无向图 $G = \langle V, E, \gamma \rangle$ 由集合 V, E 和函数 γ 组成，其中

(1) $V \neq \emptyset$ 为点集， V 之元素称为点 (vertex, vertices[复])。

(2) E 为边集， E 之元素称边 (edge)。

(3) $\gamma : E \rightarrow \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$

- 若对于 $e \in E$ 有 $\gamma(e) = \{u, v\}$ ，则称 u 和 v 为 e 的端点。
- 若对于 $e_1, e_2 \in E$ 有 $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$ ，则称 e_1 和 e_2 为重边 (multiedge)。
- 对于 $e \in E$ ， e 的重数 $= |\{e' \in E \mid \gamma(e') = \gamma(e)\}|$ 。
- 若对 $e \in E$ 有 $\gamma(e)$ 呈形 $\{u, u\}$ 则称 e 为环 (loop)。
- 若 G 有重边但无环则称 G 为多重图。
- 若 G 既无环又无重边，则称 G 为简单图 (simple graph)。

约定：通常 $G = \langle V, E, \gamma \rangle$ 中的 γ 被省略，直接写 $\langle V, E \rangle$ 且 $V \cap E = \emptyset$ 。

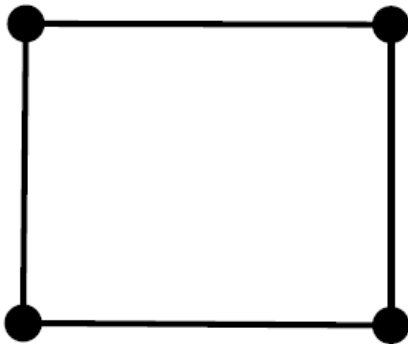


图的定义与表示 (续)

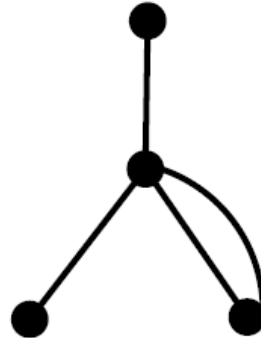


■ $G = \langle V, E, \gamma \rangle$ 为简单图 \Leftrightarrow

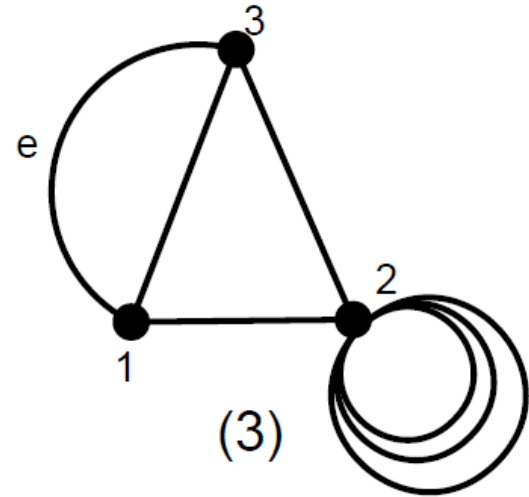
$$\gamma: E \xrightarrow{1-1} \{\{u, v\} | u, v \in V \wedge u \neq v\}$$



(1)



(2)



(3)

(1) 为简单图, (2) 多重图, (3) 为无向图, 边 e 之重数为 2, 点 2 上有 3 个环。 (2) 和 (3) 都是伪图 (含有多重边和/或环的图, *i.e.* 非简单图)



图的定义与表示 (续)

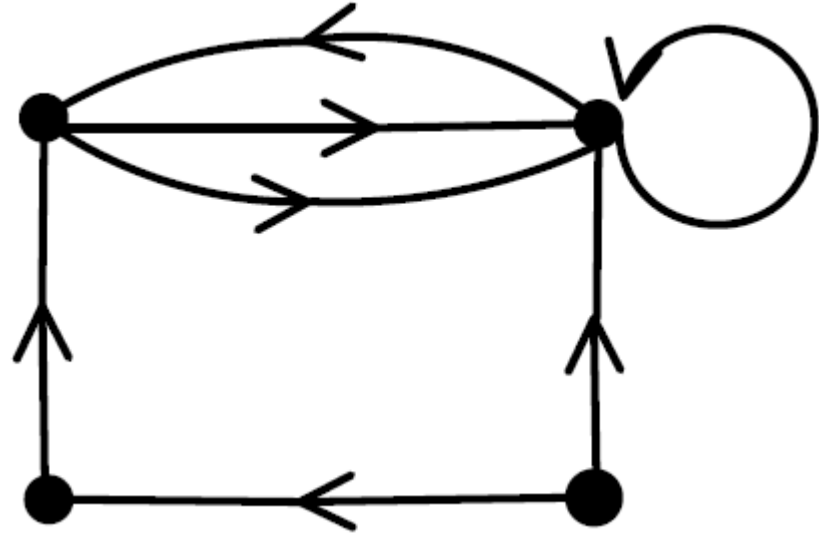


■ 定义 (有向图, directed graph) : $G =$

$\langle V, E \rangle$ 由点集 V 和边集 E 组成, 其中 E 为 $V \times V$

的多重集^{*}之子集

(^{*}指元素可重复出现之集合)





图中的关系

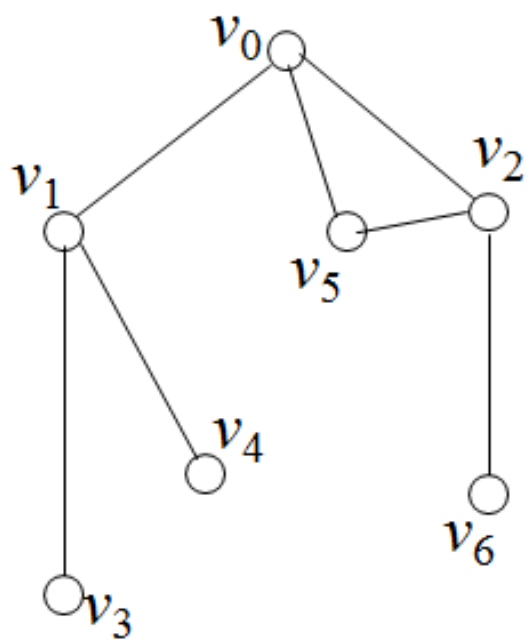


- 图中边与顶点之间的关系：关联关系
- 图中顶点之间(边之间)的关系：相邻关系
- 利用上述关系，可用矩阵来表示图（请自学【Rosen】10.3.3、10.3.4节相关内容）





顶点的相邻矩阵表示无向图



	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_0	0	1	1	0	0	1	0
v_1	1	0	0	1	1	0	0
v_2	1	0	0	0	0	1	1
v_3	0	1	0	0	0	0	0
v_4	0	1	0	0	0	0	0
v_5	1	0	1	0	0	0	0
v_6	0	0	1	0	0	0	0



图的术语



定义： 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为有穷无向图

1. G 的点集记为 V_G ，边集记为 E_G ； G 的点数为 $|V_G|$ ，记为 v_G ； G 的边数为 $|E_G|$ ，记为 e_G 。
2. 若 $v_G = n$ ，称 G 为 n 阶图。
3. 若 G 为简单图， $v_G = n, e_G = m$ ，称 G 为 (n, m) 图。若 G 的点和边用字母标定，是称 G 为标定图。
4. 设 $u, v \in V$ ，若边 e 的两个端点为 u, v ，则称 u 与 v 邻，记为 $u - v$ ，并称 e 与 u, v 关联。
5. 设 $e \in E$, $G - e$ = 在 G 中去边 e 。
6. 设 $v \in V$, $G - v$ = 在 G 中去点 v 及其关联的边。
7. 设 $u, v \in V$, $G + (u, v)$ = 在 G 中加端点的 u, v 的新边。



顶点的度



- 顶点 v 的度(degree): $d(v)$ = 与点 v 关联的边数, 对于与 v 关联的环, $d(v)$ 算作2度

- 图的最大度与最小度:

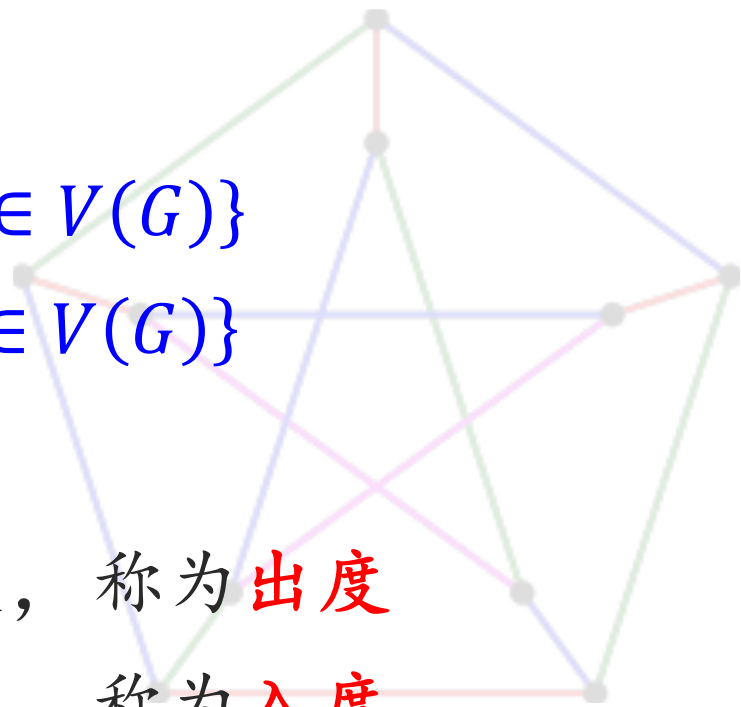
$$\Delta(G) = \max \{d(v) | v \in V(G)\}$$

$$\delta(G) = \min \{d(v) | v \in V(G)\}$$

- 对于有向图:

○ $d^+(v)$ = 以 v 为始点的边数, 称为出度

○ $d^-(v)$ = 以 v 为终点的边数, 称为入度

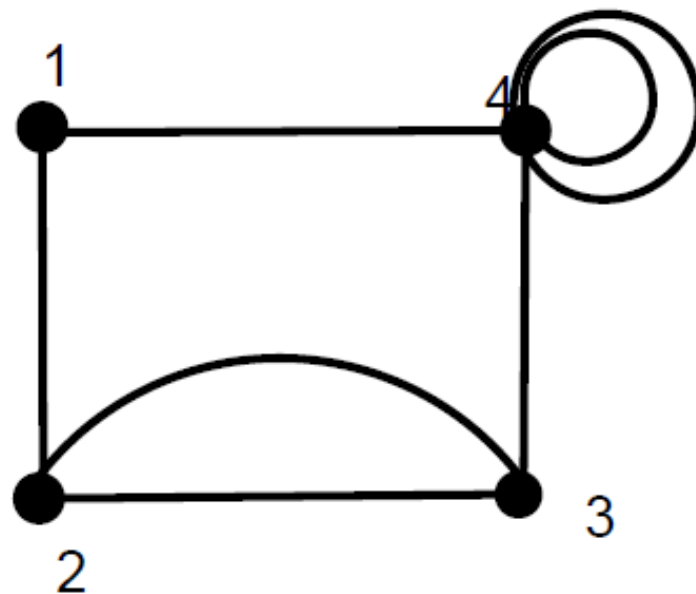




顶点的度 (续)



例:



$$d(1) = 2 \quad d(2) = 3 \quad d(3) = 3 \quad d(4) = 6$$

$$\Delta_G = 6, \delta_G = 2$$



顶点度的数量特征



- **定理**（**握手定理, Euler 1736**）：设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图，则

$$\sum_{i=1}^{|V_G|} d(v_i) = 2|E_G|$$

- **证明**：设 ρ 为从 G 到 $G - \{e\}$ 的变换，即 **去一边** 变换，在变换 ρ 作用下 $\sum d(v_i) - 2|E_G| = \text{定数}$ ，当 G 无边时， $\sum d(v_i) - 2|E_G| = 0$ 故定数为 0，得证. \square



顶点度的数量特征 (续)



■ **推论：**任意图中奇度顶点数为偶

■ **证明：**设 Odd_G 为 G 中奇度顶点个数的奇偶性，

易见 Odd_G 在去一边变换 ρ 之下保持不变，而 G 无

边时 Odd_G 为偶，故对任意图 G ， Odd_G 皆为偶。□



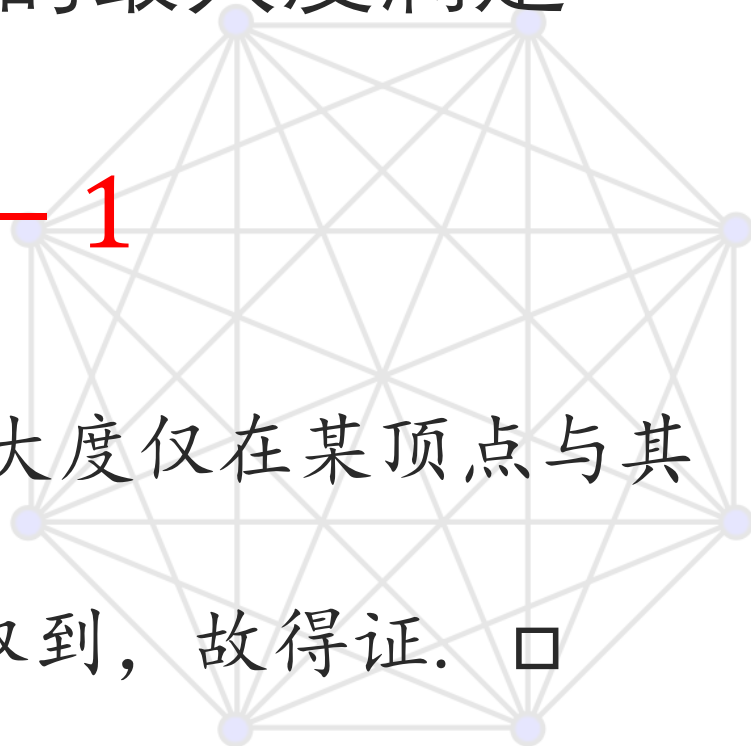
顶点度的数量特征 (续)



■ **定理：** n 阶无向简单图的最大度满足

$$\Delta(G) \leq n - 1$$

■ **证明：** n 阶无向简单图的最大度仅在某顶点与其
余诸 $n - 1$ 个顶点皆相邻时取到，故得证. \square

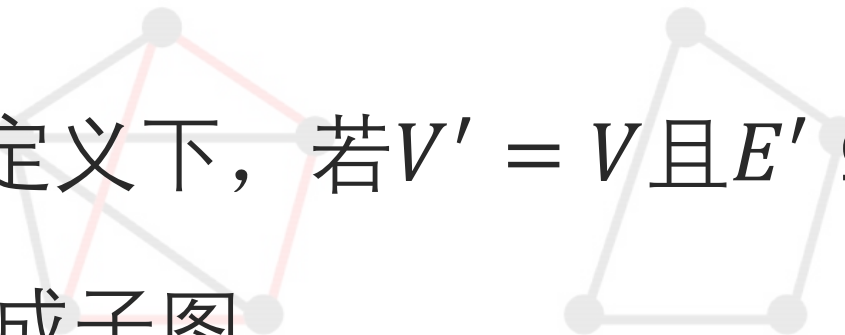




子图 (subgraph)



- **子图**: $G = \langle V, E \rangle$ 与 $G' = \langle V', E' \rangle$ 二图, 若有 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$, 称 G' 为 G 的子图: $G' \subseteq G$
- **母图**: 在上述定义下, G 为 G' 之母图
- **生成子图**: 在上述定义下, 若 $V' = V$ 且 $E' \subseteq E$, 则称 G' 为 G 的生成子图





图的同构



定义： 设 $G_1 = \langle V_1, E_1, \gamma_1 \rangle$ 与 $G_2 = \langle V_2, E_2, \gamma_2 \rangle$ 为无向图。若有函数 $f : V_1 \cup E_1 \rightarrow V_2 \cup E_2$ 满足：

$$f : V_1 \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} V_2, f : E_1 \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} E_2, \text{ 且 } \gamma_1(e) = \{u, v\} \iff \gamma_2(f(e)) = \{f(u), f(v)\}$$

且 e 与 $f(e)$ 的重数相等，则称 G_1 同构于 G_2 via f ，记为 $G_1 \cong G_2$ 。

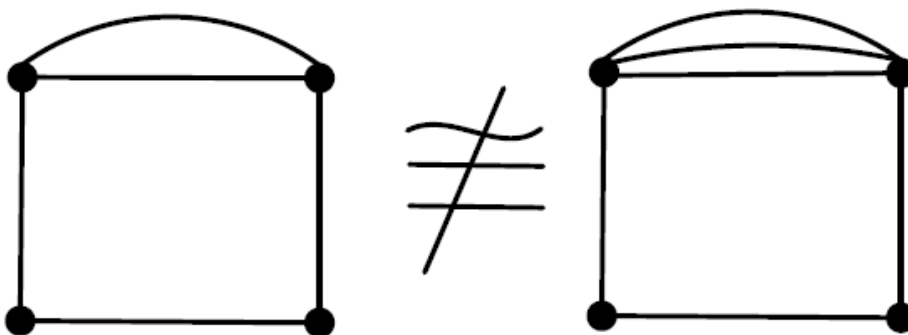
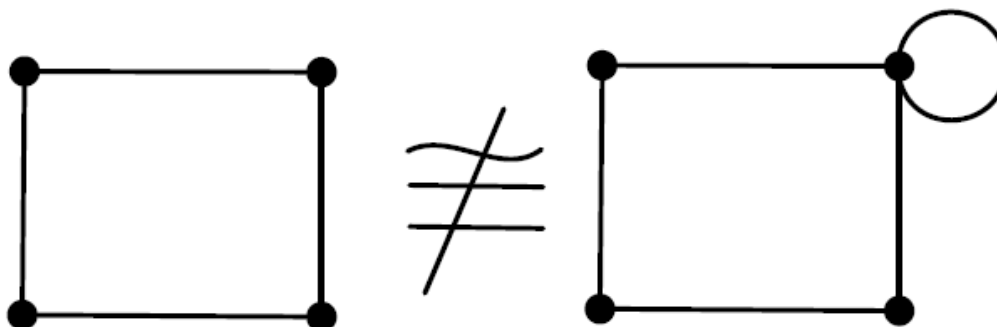
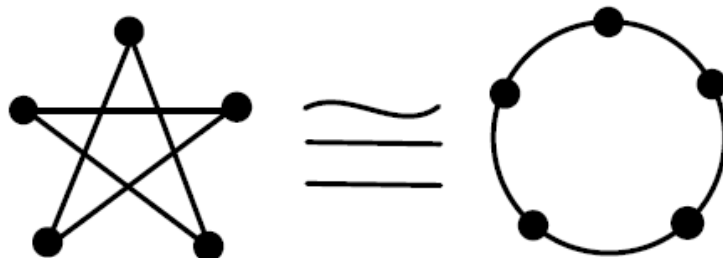
- 同构的图具有相同的阶、相同的边数、相同的度序列；但反之则不一定



图的同构 (续)



例1:

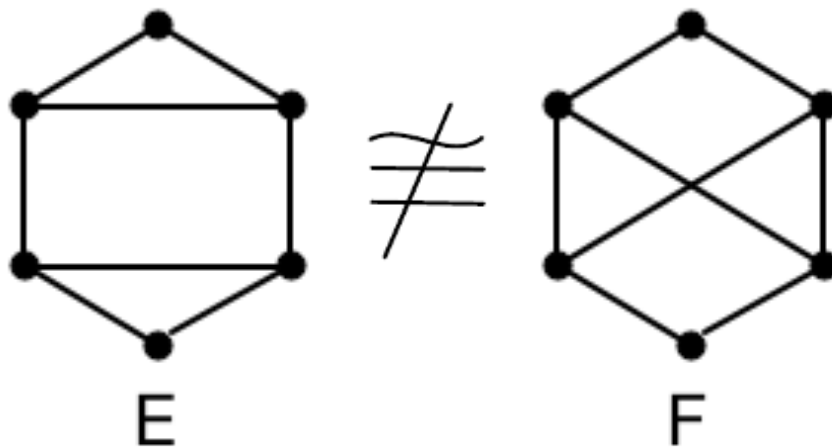
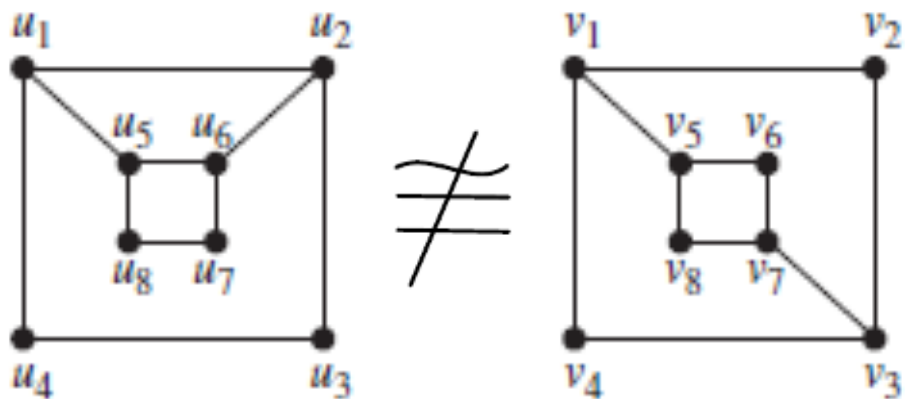




图的同构 (续)



例2:

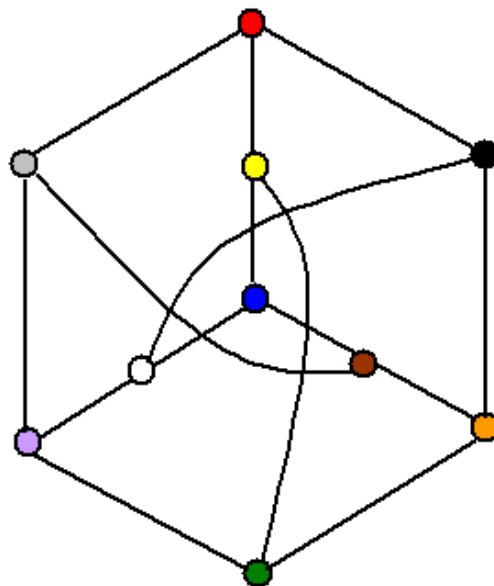
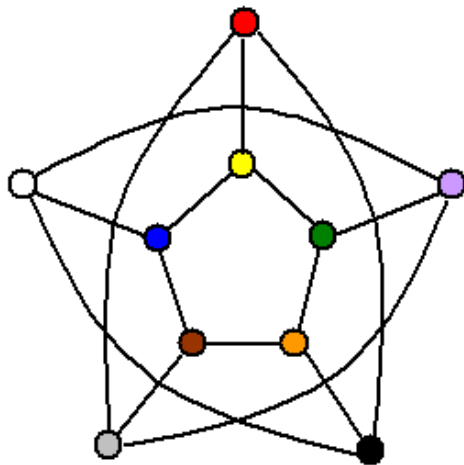
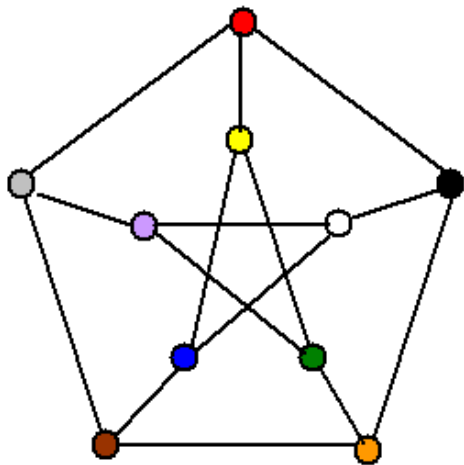




图的同构 (续)



例3: 以下3图同构 (Petersen图)

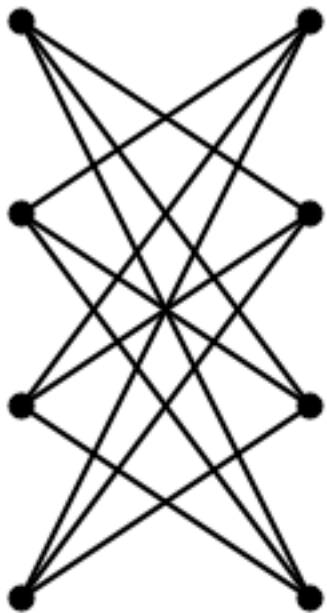




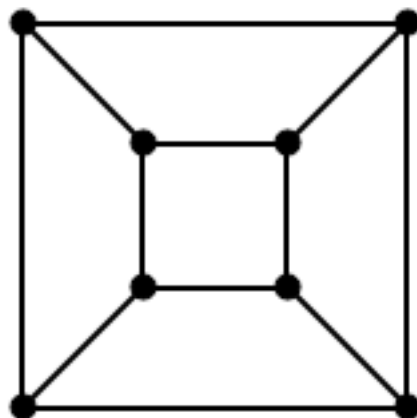
图的同构 (续)



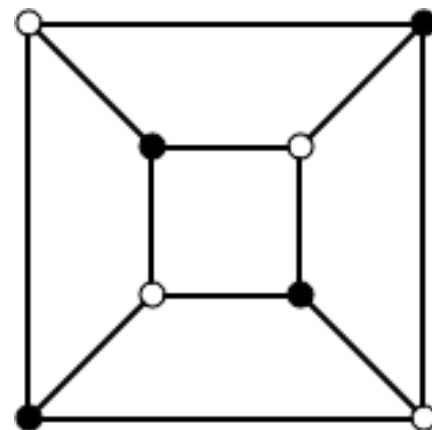
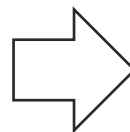
例4: 以下2图同构



A



B



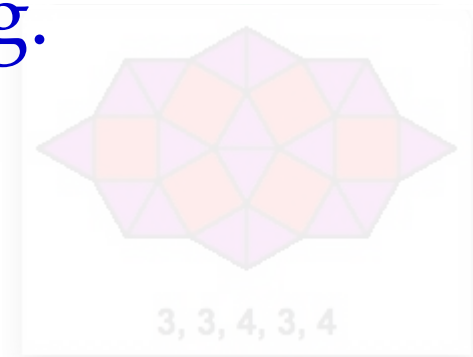
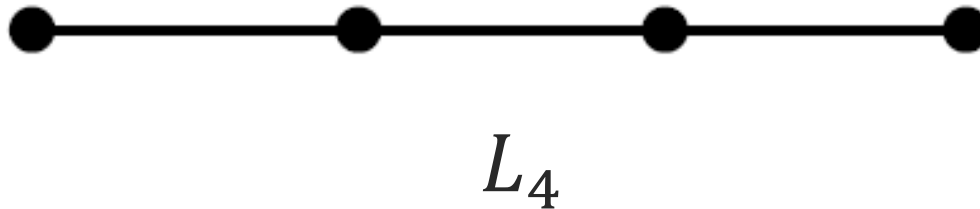


一些特殊的简单图



(注意：此讲只讨论简单图)

- n 阶零图 (N_n) : 有 n 个顶点但无边
- 线图 (L_n) : 有 n 个顶点 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 且 $v_i - v_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), e.g.

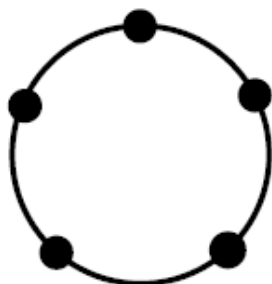




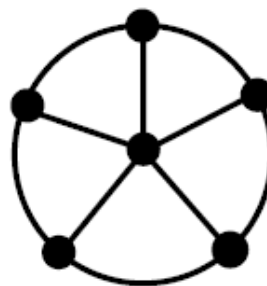
一些特殊的简单图 (续)



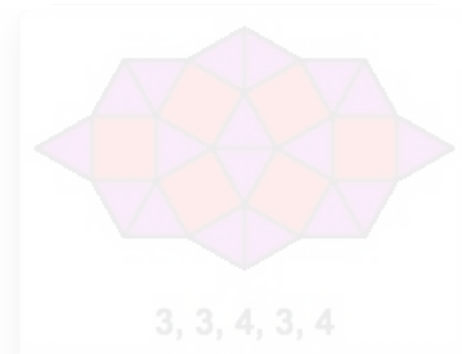
- **圈图** C_n : 有 n 个顶点 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $v_i - v_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 且 $v_n - v_1$
- **轮图** W_n : 有 $n+1$ 个顶点 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ 成圈图 C_n 且 $v_0 - v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)



C_5



W_5





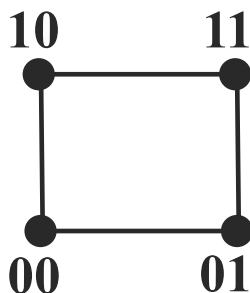
一些特殊的简单图 (续)



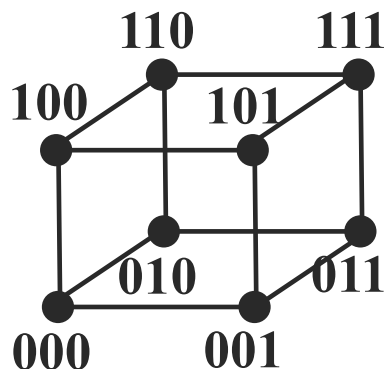
- 超立方体图 (hypercube graph) Q_n : 具有 2^n 个顶点, $2^{n-1}n$ 条边, 每个顶点关联 n 条边的正则图 (后面定义)



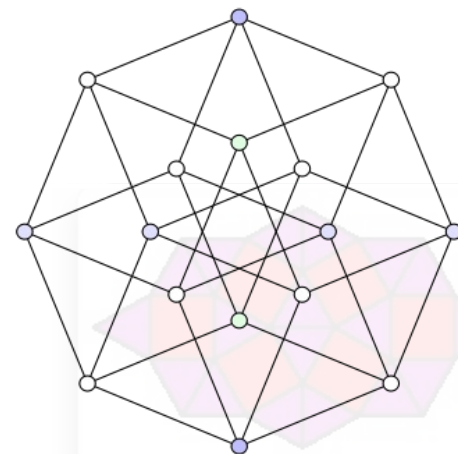
Q_1



Q_2



Q_3



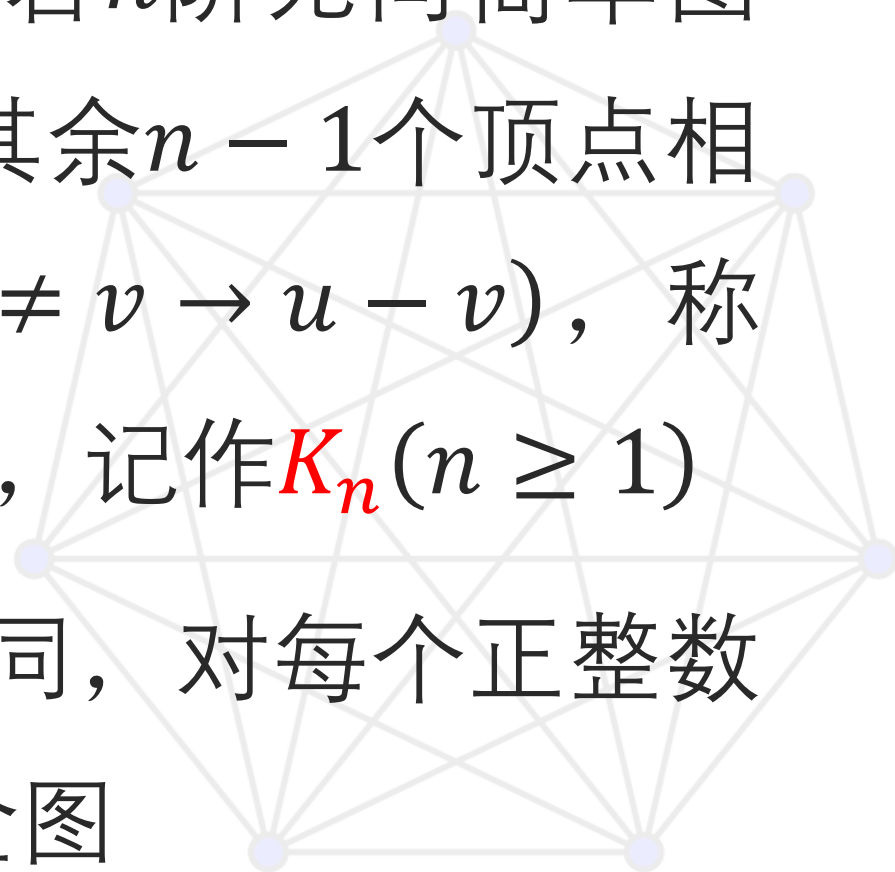
Q_4



完全图 (complete graph)



- **定义 (完全图)** : 若 n 阶无向简单图 G 中每个顶点均与其余 $n - 1$ 个顶点相邻: $(\forall u, v \in V)(u \neq v \rightarrow u - v)$, 称 G 为 n 阶**无向完全图**, 记作 $K_n (n \geq 1)$
- 若同构的图视为相同, 对每个正整数 n 有且仅有一个完全图





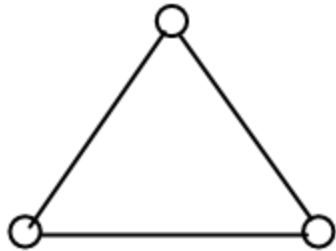
完全图 (续)



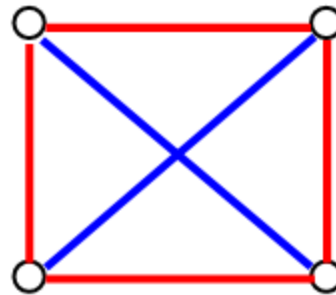
K_1



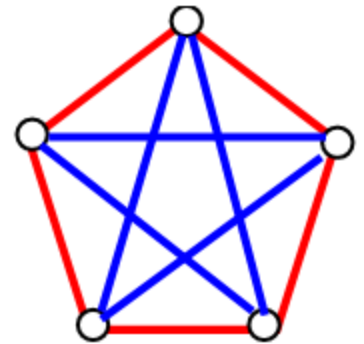
K_2



K_3



K_4



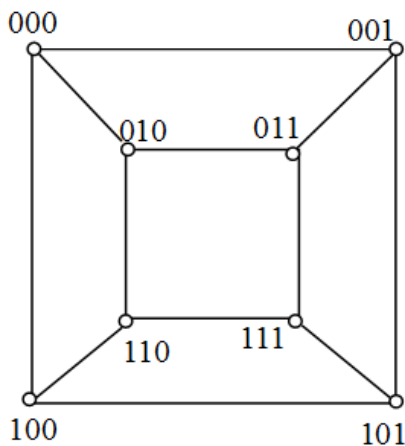
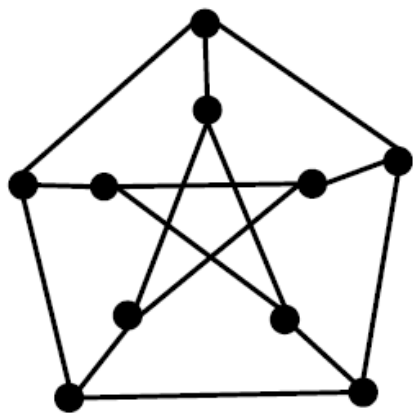
K_5



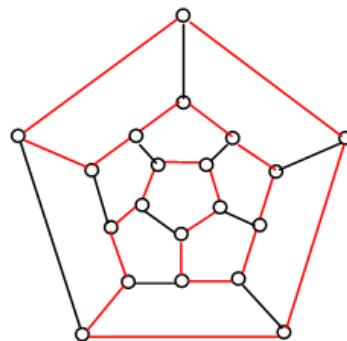
正则图 (regular graph)



- 定义 (正则图) : n 阶无向简单图, 若 $\forall v \in V, d(v) = k$, 则称 G 为 k -正则图



以等长 2 进制编码为顶点的图

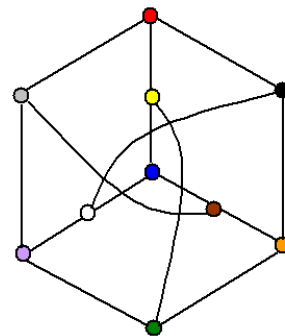
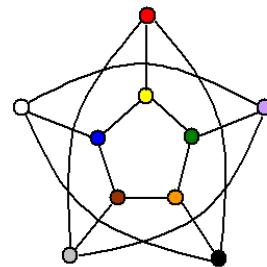
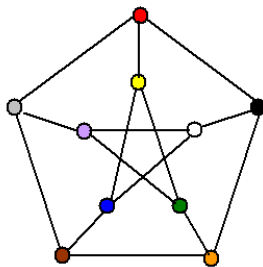




正则图的简单性质



- n 阶 k -正则图，即 $\Delta(G) = \delta(G) = k$ 的无向简单图满足：边数 $m = \frac{1}{2}nk$
- 易见， K_n 是 $(n-1)$ -正则图，Peterson图为3-正则图





二部图 (bipartite graph)



- **定义 (二部图)** : 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若能将 V 分为不交的两部分 V_1 和 V_2 , 使得 G 中每条边的两个端点均分属 V_1 和 V_2 , 即:

$$(\exists V_1, V_2) \left(\begin{array}{l} V_1 \neq \emptyset \wedge V_2 \neq \emptyset \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset \wedge \\ V_1 \cup V_2 = V \wedge (\forall u, v \in V) (u, v \in V_1 \vee u, v \in V_2 \rightarrow \neg(u - v)) \end{array} \right)$$

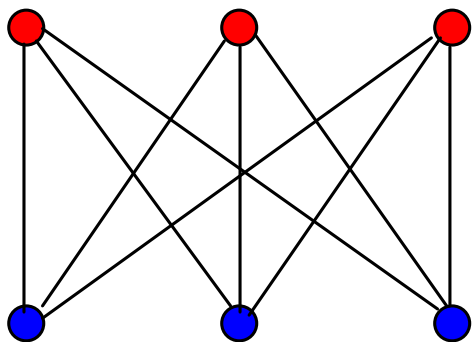
则称 G 为**二部图** (或**偶图**) , 记为 $\langle V_1, V_2, E \rangle$



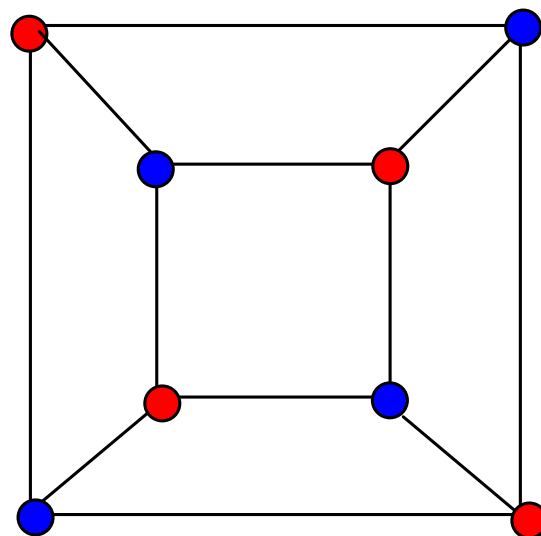
二部图 (续)



- **完全二部图**: G 为简单二部图, V_1 中每个顶点均与 V_2 中**所有**顶点相邻, 记为 $K_{|V_1|, |V_2|}$



$K_{3,3}$



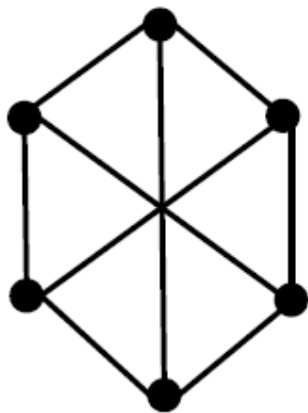
非完全二部图



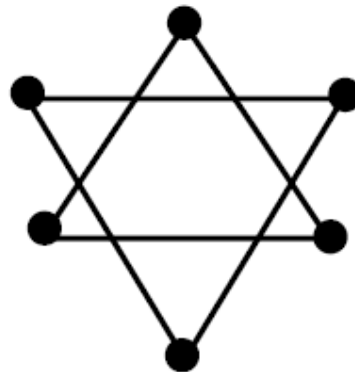
补图 (complement graph)



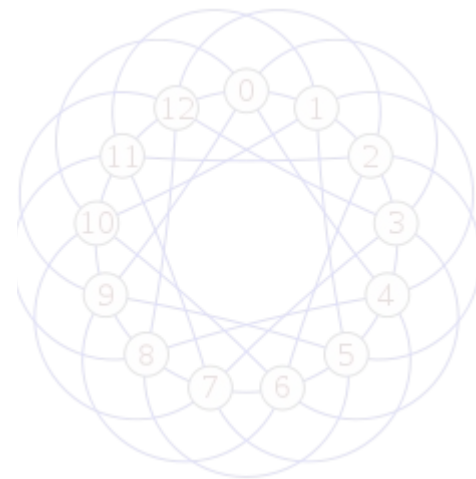
- 简单图 G 的补图 \bar{G} 以 V 为点集但两个顶点在 \bar{G} 中相邻当且仅当它们在 G 中不相邻



G



\bar{G}



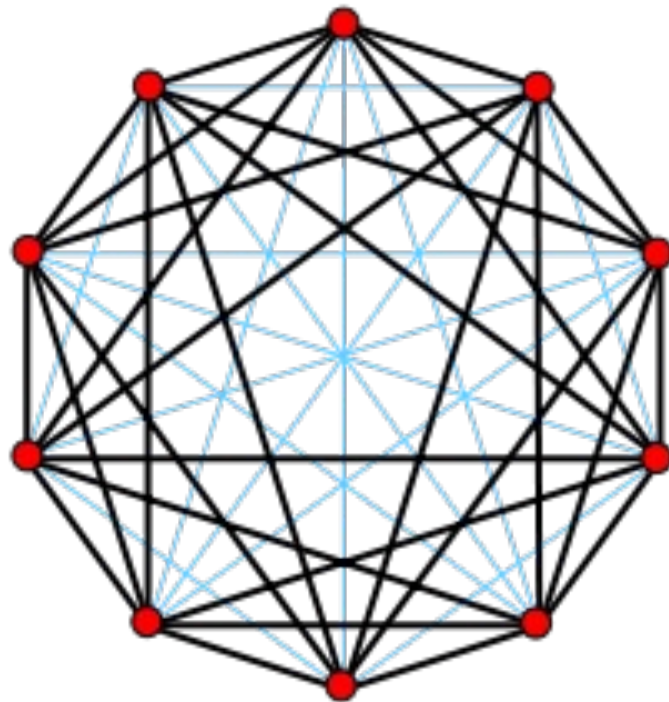
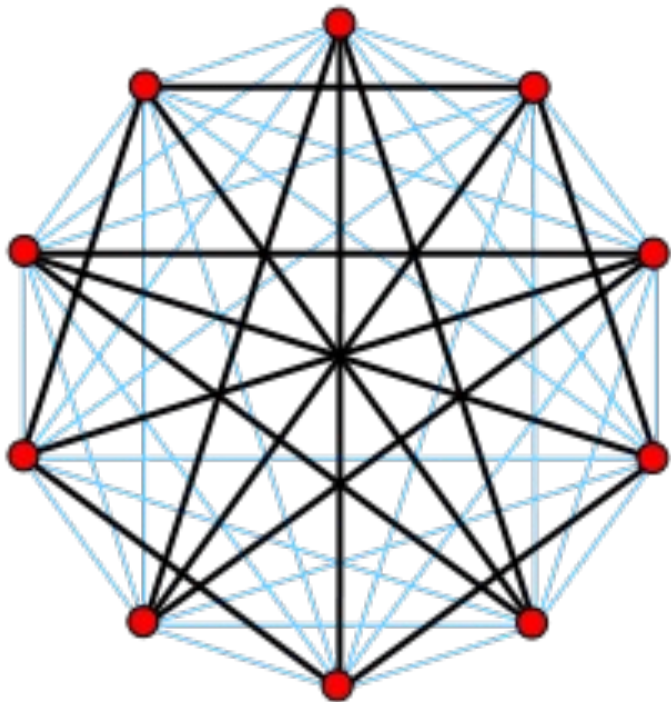
注: \bar{G} 即为著名的 David 图。



补图 (complement graph)



- 易见： n 阶图 G 与其补图 \bar{G} 的并图为 K_n





图的基本运算



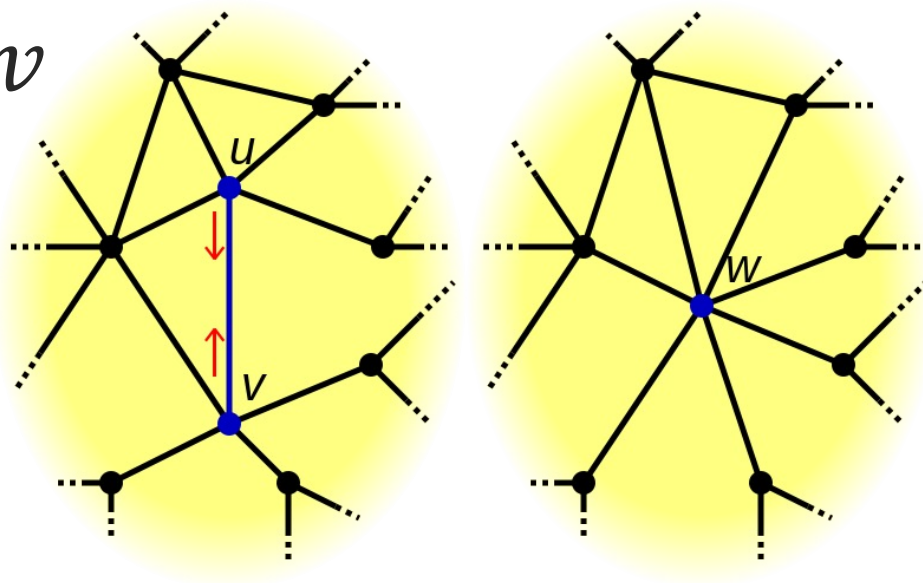
■ 减边或边集: $G - e$

■ 减点或点集: $G - v$

■ 边收缩: $G \bullet e$

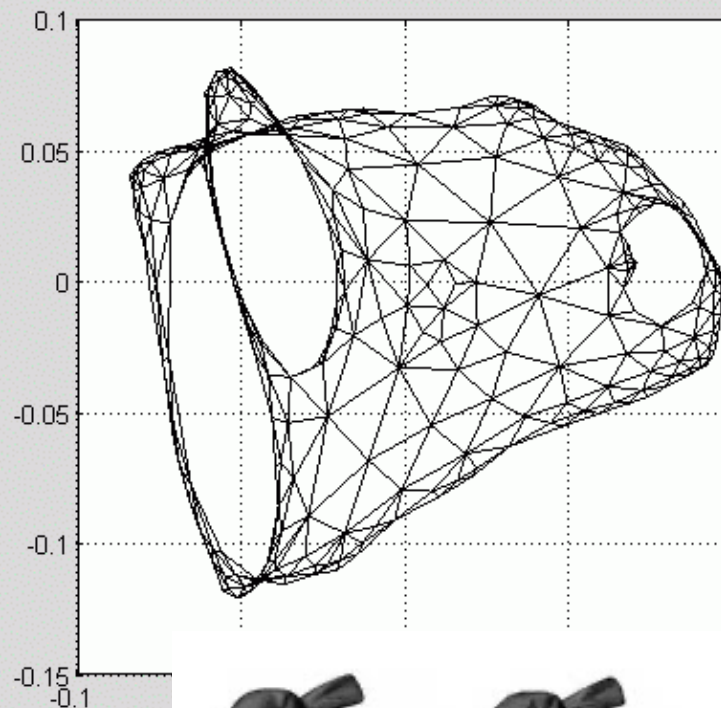
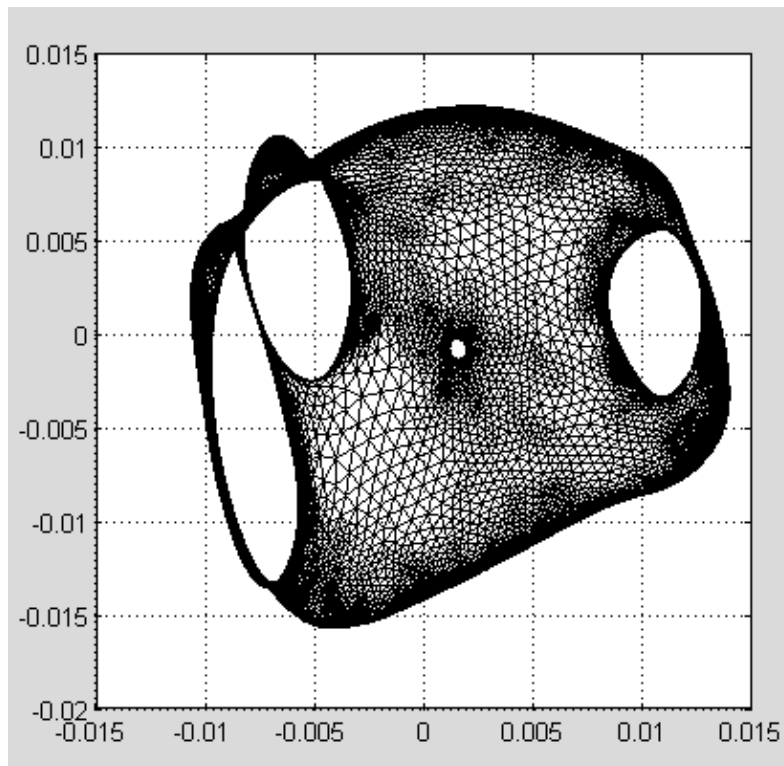
■ 加新边: $G + e$

■ 并图^{*}、交图^{*}、差图^{*}、环和^{*}等





边收缩的应用





图模型的应用——渡河问题



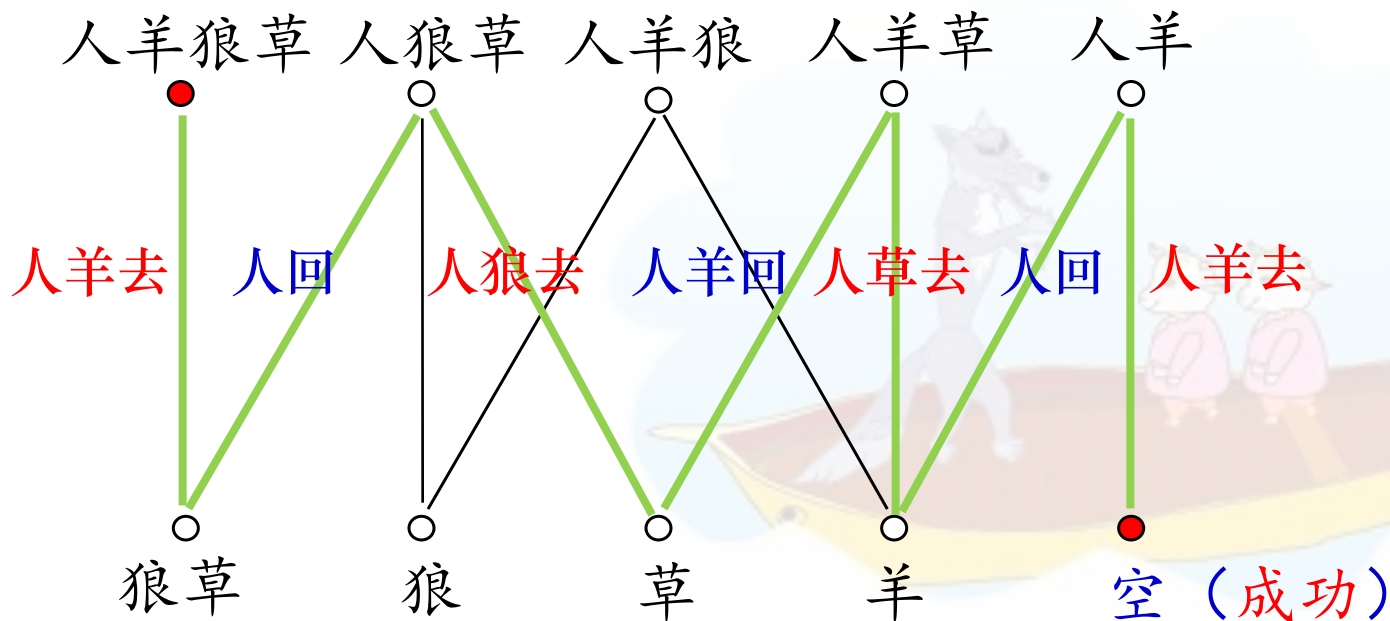
- **问题：**人、狼、羊、草用一条只能同时载两位的小船渡河，“狼羊”、“羊草”不能场时共在无人时在场，只有人能架船。求最快渡河方案
- **图模型：**顶点表示“原岸的状态”，两点之间有边当且仅当一次合理的渡河“操作”能够实现该状态的转变——此为一个二部图
- **起始状态：**“人狼羊草”，**结束状态：**“空”
- **问题的解：**找到一条从起始状态到结束状态的**尽可能短的通路**



图模型的应用——渡河问题（续）



- **注意：**在“人、狼、羊、草”的16种组合种允许出现的只有10种





图模型的应用：考试时间编排问题



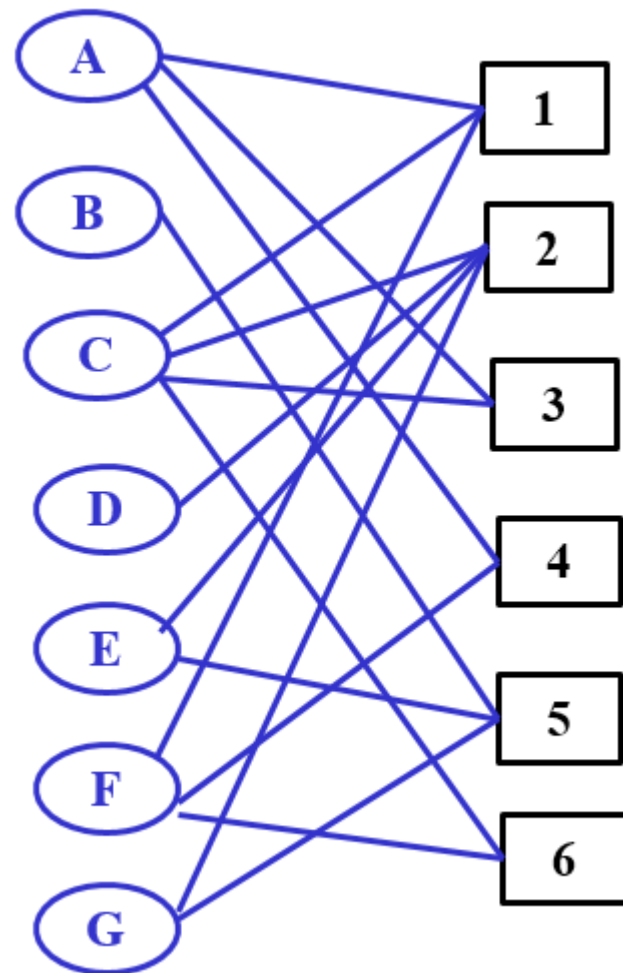
- **问题：**排考试时间，一方面要总时间尽可能短(假设教室没问题)，另一方面一个同学所选的任意两门课不能同时间
- **图模型：**每门课程对应一个顶点。任意两点相邻当且仅当对应的两门课程有相同的选课人
- **解：**用不同颜色给顶点**着色**。相邻的点不能同颜色。则**最少着色数**即至少需要的考试时间段数(可以将颜色相同的点所对应的课程安排在同一时间)



图模型的应用：二部图的最大匹配



- **问题** (Hall's marriage problem) : 孤岛上有 m 个男子和 n 个女子，每个人均有一个中意的配偶列表，如何成就尽可能多的幸福婚姻？
- **图模型**：每个人对应一个顶点，男子和女子的集合对应二部图中的两个不相交集，边对应着中意的配偶关系
- **解**：求二部图中的最大匹配





图的通路与回路



定义： 给定图 $G=\langle V,E\rangle$ (无向或有向的), G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_0e_1v_1e_2\dots e_lv_l$, v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点.

- (1) 通路与回路: Γ 为通路; 若 $v_0=v_l$, Γ 为回路, l 为回路长度.
- (2) 简单通路与回路: 所有边各异, Γ 为简单通路, 又若 $v_0=v_l$, Γ 为简单回路
(i.e. 顶点与边)
- (3) 初级通路 (路径) 与初级回路 (圈): Γ 中所有顶点各异, 则称 Γ 为初级通路 (路径), 又若除 $v_0=v_l$, 所有的顶点各不相同且所有的边各异, 则称 Γ 为初级回路 (圈)
- (4) 复杂通路与回路: 有边重复出现

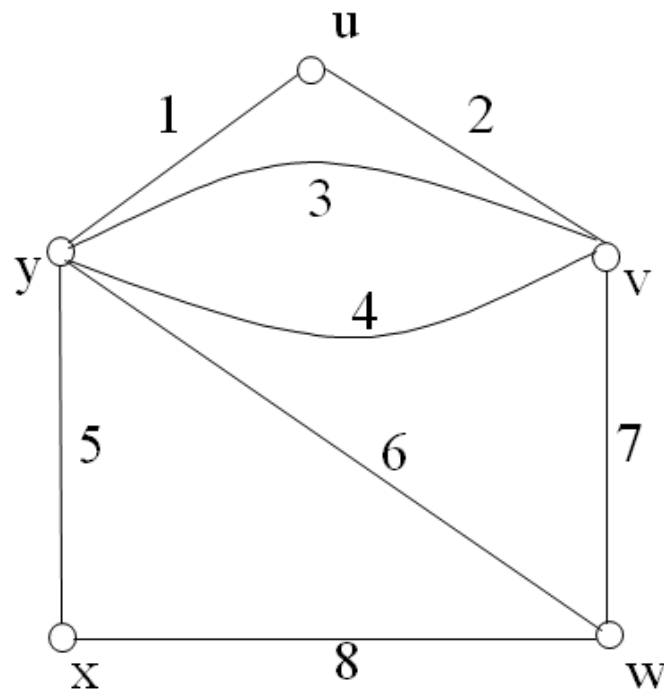


图的通路与回路 (续)



■ 例1:

- 通路: $u2v3y3v4y6w7v$
- 简单通路: $w8x5y6w7v4y$
- 初级通路: $x8w6y1u2v$
- 回路: $u1y6w7v2u$

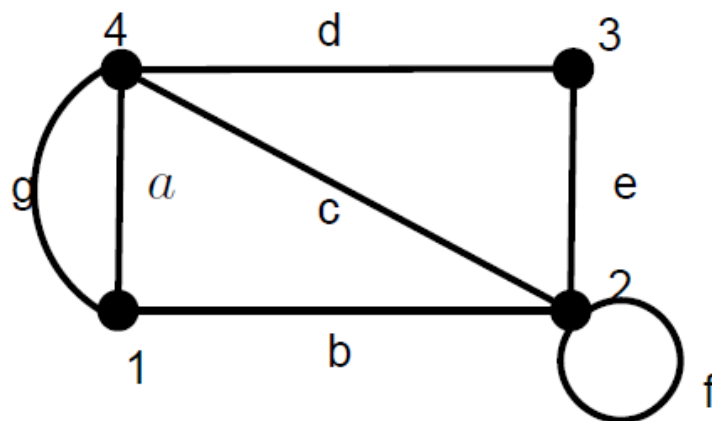




图的通路与回路 (续)



■ 例2:



- ① $1a4c2f2b1g4d3e2c4$ 为通路，但非简单通路。
- ② $1a4c2f2b1g4$ 为简单通路，但非路径。
- ③ $1a4c2b1$ 为圈长度为 3。
- ④ $2f2$ 为圈，长度为1，此圈为环。
- ⑤ $1a4g1$ 圈，长为 2，此圈由平行边 a, g 组成。



图的通路与回路（续）



- **注意：** 由于图论发展的历史原因，不同教材及其它各类文献中用于描述通路的术语多有差异，总结如下（在命题中通路一般均可用路径代替）：
 - **path (walk)：** 一般译为**通路**，指图中顶点和边交替的序列，但许多文献将path当做初级通路（或路径）
 - **simple path (trail)：** 一般译为**简单通路**，指无重复边的通路，但也有文献将simple path当做初级通路（或路径）
 - **elementary path (path)：** 一般译为**初级通路**，指顶点与边均无重复的通路，即**路径**



图的通路与回路 (续)



■ **定理 (通路存在性定理)** : 在 n 阶图 G 中, 若从顶点 v_i 到 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路, 则从 v_i 到 v_j 存在长度小于或等于 $n - 1$ 的通路

证: 设 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_t v_t$ ($v_0 = v_i, v_t = v_j$) 为 G 中一条长度为 t 的通路.

- 当 $t \leq n - 1$ 时, 则 Γ 满足要求;
- 当 $t > n - 1$, 即 Γ 上的顶点数多于 G 中的顶点数, 显然由鸽笼原理, 必存在 $0 \leq k < s \leq t$, 使得 $v_s = v_k$, 即在 Γ 上存在 v_s 到 v_k 的回路 C_{sk} . 在 Γ 上删除 C_{sk} 中的所有边和所有顶点 (除 v_s 外), 从而得 $\Gamma' = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_s e_{s+1} \cdots e_t v_t$; 此时, Γ' 仍为 v_i 到 v_j 的通路, 且长度 t' 小于 Γ 的长度. 若长度 t' 仍大于 $n - 1$, 则重复上述过程. 由于 G 是有限图, 经过有限步后, 必得到从 v_i 到 v_j 长度小于或等于 $n - 1$ 的通路. \square



图的通路与回路 (续)



■ **推论 (路径存在性定理)** : n 阶图 G 中, 若从顶点 u 到 w ($u \neq w$) 存在通路, 则从 u 到 w 存在**长度小于或等于 $n - 1$ 的路径**

证明: 设 $P(l)$ 为 “若从 u 到 w 有长 l 的通路且 $u \neq w$, 则从 u 到 w 有路径”。

用数学归纳法证明 $P(l)$ 。

Basis : 当 $l = 1$, 不证自明。

I.H. : **$\forall k < l$ 时 $P(k)$ 成立 (注意: 这里采用强归纳, Why?)**

Ind.Step : 设从 u 到 w 有长为 l 的通路 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 \dots e_l v_l$, 这里 $v_0 = u, v_l = w$.

case 1. v_0, \dots, v_l 互异, 由归纳假设和路径的定义, Γ 为路径。

case 2. v_0, \dots, v_l 不互异, 故有 $v_i = v_j (i < j)$, 从而 $\Gamma =$



图的通路与回路（续）



- **推论（路径存在性定理）**：在 n 阶图 G 中，若从顶点 v_i 到 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路，则从 v_i 到 v_j 存在长度小于或等于 $n - 1$ 的路径

证明（续）：

$\Gamma = v_0 e_1 \dots e_i v_i e_{j+1} v_{j+1} \dots e_l v_l$ 为由 u 到 w 且长度 $< l$ 的通路；

由归纳假设, $P(k)$ 成立，从而从 u 到 w 有路径故 $P(l)$ 成立归纳完成。

因此若从 u 到 w 有通路，则从 u 到 w 有路径，易见此路径的长 $\leq n - 1$ 。



图的通路与回路的应用



- **渡河问题***：一人(F)携带三物：狼(W)、羊(S)、草(H)渡河，渡船只许人带一物过渡，又狼与羊，羊与草不能独处同岸，问如何过河？共有**几种本质不同的过法**？



图的通路与应用 (续)

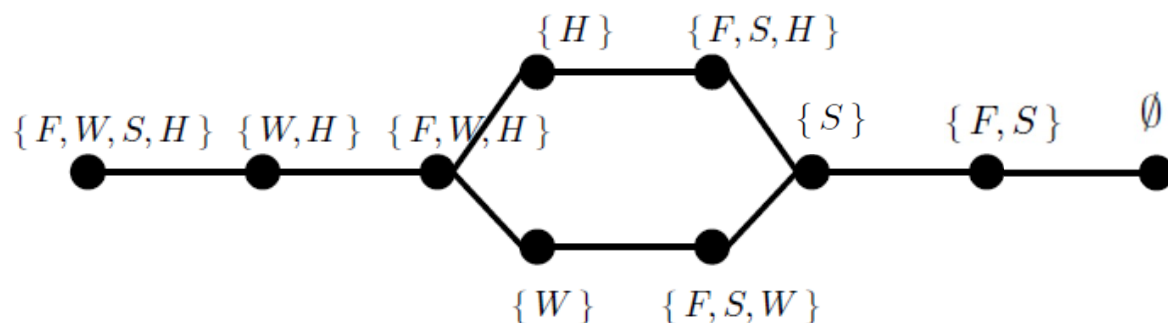


解答： 建模： 令 $S = \{F, W, S, H\}$, $V = \{\{F, S, W, H\}, \{F, S, W\}, \{F, S, H\}, \{F, W, H\}, \{F, S\}, \{F, W\}, \{F, H\}, \{W, H\}, \{S\}, \{W\}, \{H\}, \emptyset\}$ ，即允许放在一起的 S 之子集。 $\forall u, v \in V$ $u - v$ 指由 u 经一次渡河得 v 。

$E = \{e_{uv} \mid u, v \in V \wedge u - v\}$, $G = (V, E)$ 为简单图

抽象描述：从 $\{F, S, W, H\}$ 到 \emptyset 是否有通路？其有几条路径？

答案：

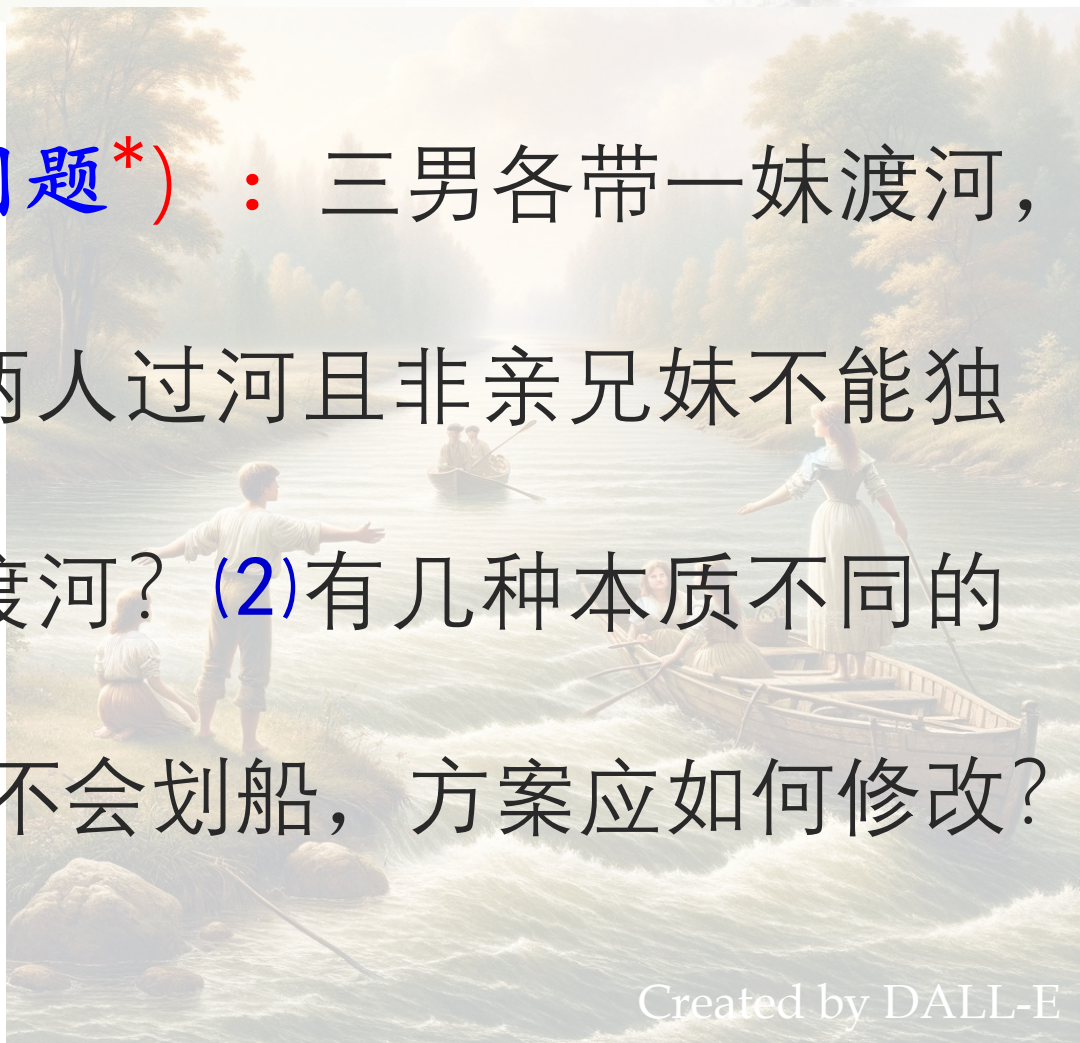




图的通路与回路的应用



- **思考（兄妹渡河问题*）**：三男各带一妹渡河，渡船每次仅能载两人过河且非亲兄妹不能独处，问：**(1)**怎样渡河？**(2)**有几种本质不同的渡法？**(3)****若妹妹不会划船，方案应如何修改？





Leonhard Euler (1707 – 1783)



- Swiss mathematician, who studied at the University of Basel under the Swiss mathematician Johann Bernoulli, obtaining his master's degree at the age of 16. He worked as a member of the faculty of the Academy of Science in Saint Petersburg, Russia for more than 30 years.
- “欧拉计算毫不费力，就象人呼吸，或者鹰在风中保持平衡一样” (阿拉戈语)，这不是对欧拉无与伦比的数学才能的夸大，欧拉是历史上著作最多的数学家，被他的同代人称为“分析的化身”。甚至在他生命的最后十年中的完全失明，也没有妨碍他的无与伦比的多产；事实上，失去视力有什么影响的话，那就是使欧拉对他想象中的内部世界的洞察力更加敏锐。 ——摘自贝尔：《数学精英》





本次课后作业



- 教材内容：[Rosen] 10.1, 10.2, 10.3（其中10.3.3与10.3.4 请自学），10.4.2, 10.4.3 节
- 课后习题：
 - Problem Set 23
 - 注：部分习题涉及“图的表示”的相关自学内容，请在自学[Rosen]10.3.3 & 10.3.4后完成
- 提交时间：5月20日 10:00 前

