

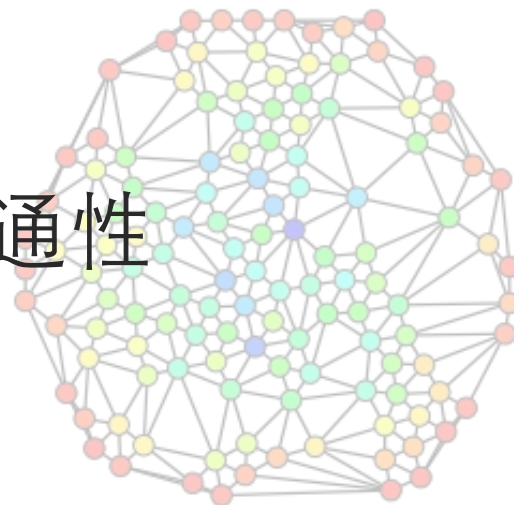
离散数学

Discrete Mathematics

第二十五讲：图的连通性

吴楠

南京大学计算机学院



2025 年 5 月 20 日



在图论中有哪些典型的证明方法？

< 3/3 >



图论是数学的一个分支，专注于图和网络的性质。有许多典型的图论证明方法，以下是一些常见的：



1. **归纳法 (Induction)**：这是一种广泛应用于图论的证明方法，尤其是在证明关于图的规模（节点或边的数量）的性质时。基本思想是首先证明基础情况（如一个节点或一条边的图），然后证明如果该性质对一个较小的图成立，那么它也应该对一个稍大的图成立。
2. **反证法 (Contradiction)**：反证法是一种常用的证明策略，其中我们假设我们想要证明的语句是假的，然后寻找一个矛盾，这就表明原来的假设必须是真的。在图论中，反证法常用于证明某些性质对所有图都成立。
3. **构造法 (Construction)**：这种证明方法通常需要构造一个特定的图，以证明某个性质是可能的，或者构造一个序列的图来证明某个性质是必然的。例如，你可能需要构造一个图，以证明存在具有某个特性的图，或者构造一系列图，以证明无论图的大小如何，都可以找到具有特定性质的图。
4. **图的同构和归结 (Isomorphism and Reduction)**：这些证明方法涉及到证明两个或更多的图在某种意义上是“相同的”（即，它们是同构的），或者一个图问题可以归结为另一个已知的图问题（即，它是可归结的）。这种方法常用于证明图的性质，或者证明一个图问题的复杂性。
5. **图的分解 (Decomposition)**：这种方法涉及将一个图分解成更小或更简单的部分，然后单独研究这些部分。这可以使问题变得更简单，也使得我们可以使用归纳法。

以上只是一些图论证明方法的例子，实际上还有很多其他的方法和策略可以使用

🔄 Regenerate response

Send a message.





在图论中（优雅地）使用数学归纳法



- 选择合适的归纳对象→根据问题的结构
 - 点数、边数、回路数、具有特殊性质的子结构（如初级回路，无环子图等）
- 通过局部操作将归纳对象降维
 - 在 $k = n + 1$ 的情况下尝试通过删顶点、删边、去回路等操作将问题简化为 $k = n$ （普通归纳）或 $k \leq n$ （强归纳）的情形
- 充分利用图的结构性质进行构造
 - 还可以结合反证法等其它证明方法



前情提要



- 图论在计算机科学中的应用
- 图的定义与表示
- 图的术语
- 子图与图同构
- 图的基本运算
- 图模型及其应用
- 图的通路与回路

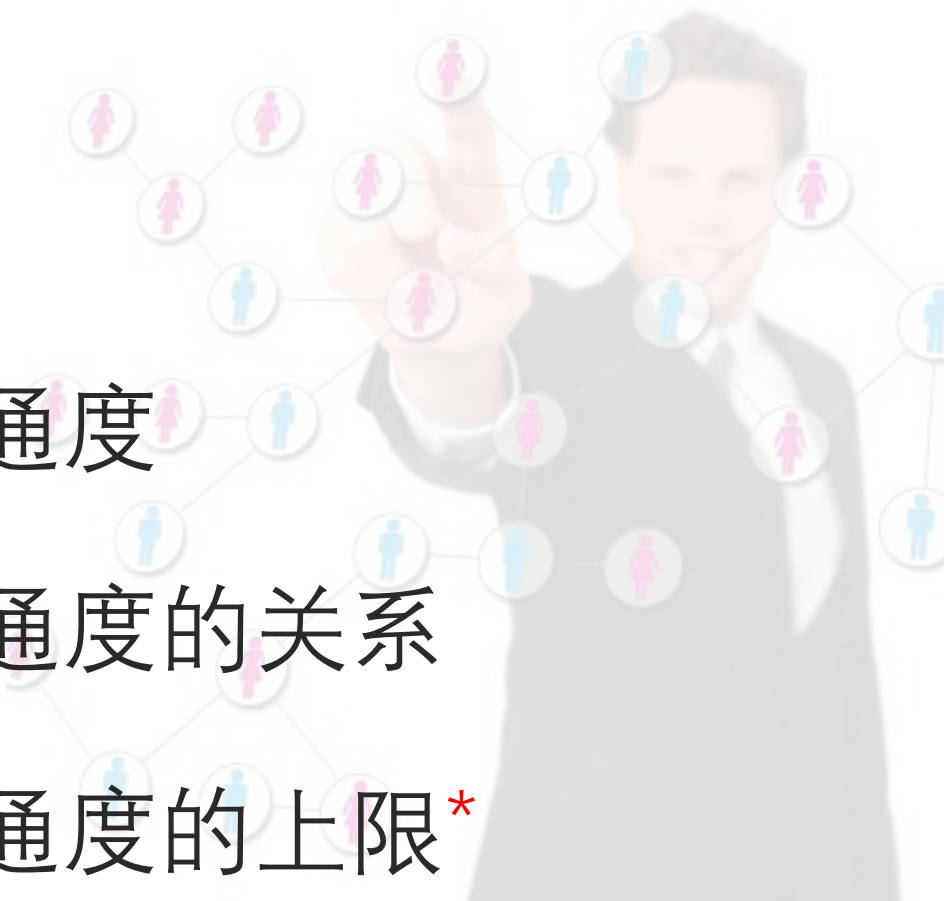




本讲主要内容



- 无向图的连通性
- 连通的度量
- 点连通度与边连通度
- 点连通度与边连通度的关系
- 点连通度与边连通度的上限*





无向图的连通性 (connectivity)



- **定义 (无向图顶点间的连通关系)** : 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图, $v_i, v_j \in V(G)$, 定义关系 \sim : $v_i \sim v_j$ 若 v_i 与 v_j 之间**存在通路**。易见, \sim 为 V 上的**等价关系**
- **定义 (无向图的连通性)** : 若 $\forall u, v \in V(G), u \sim v$, 称无向图 G **连通** (connected)
- **定义 (连通分支)** : 商集 $V(G)/\sim = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, 称 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 为图 G 的**连通分支** (connected component), 其计数为 $p(G) = k$



无向图的连通性（续）



- 定义（连通图）：若无向图 G 是平凡图或任何两顶点均连通，称 G 为连通图（connected graph），否则称 G 是非连通图（disconnected graph）或分离图（separated graph）。显然，完全图 $K_n (n \geq 1)$ 是连通图，零图 $N_n (n \geq 2)$ 是分离图且其连通分支最多，为 $p(N_n) = n$
- 对连通图， $p(G) = 1$ ；对非连通图， $p(G) \geq 2$



图的连通性 (续)



■ **命题：**若 G 不连通，则 G 的补图 \bar{G} 连通

■ **证明：**

假设 G 不连通。任给 $u, v \in \bar{G}$ ：

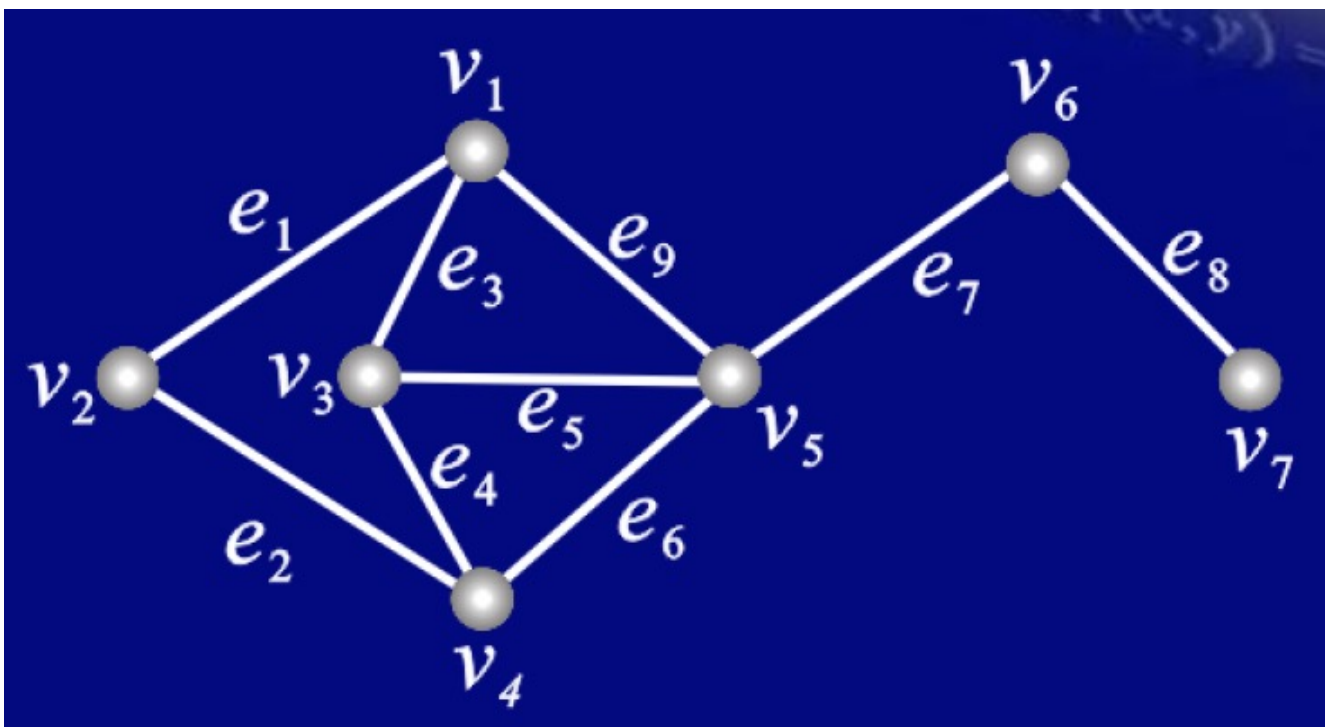
- 如果 $uv \notin E(G)$ ，则 u 与 v 在 \bar{G} 中相邻；
- 如果 $uv \in E(G)$ ，因为 G 是非连通图，一定存在顶点 w 与 u, v 在不同的连通分支中，于是 $uw \notin E(G), vw \notin E(G)$ 。所以 $uw \in E(\bar{G}), vw \in E(\bar{G})$ ，因此 (u, w, v) 是 \bar{G} 中的 (u, v) -通路， \bar{G} 是连通图. \square



连通性的度量



- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？





连通性的度量（续）



- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？

- (1) 边的删除可能导致连通分支数的增加：

$$p(G) \leq p(G - \{e\}) \leq p(G) + 1$$

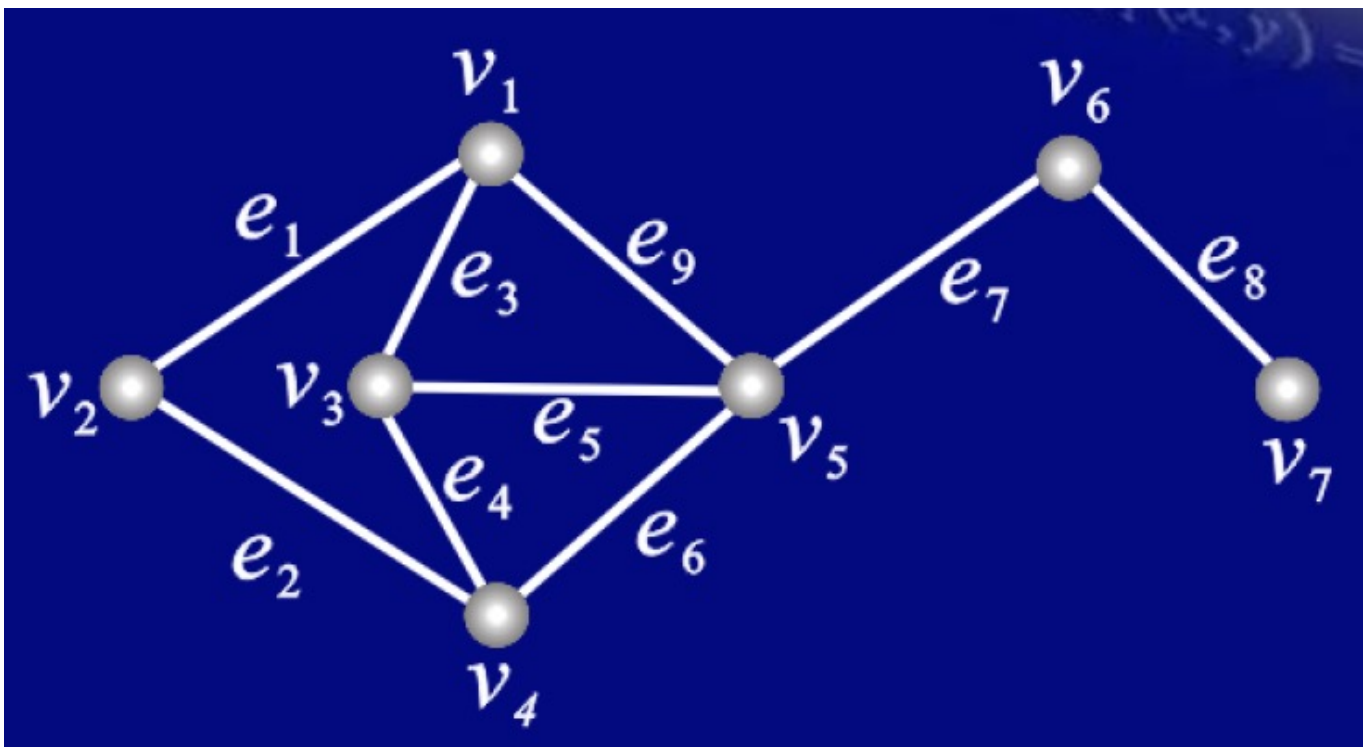
- 第一个“不大于”显然成立(删除边 e 只会影响 e 所在的那一个连通分支)
- 第二个“不大于”：注意在图中任意两点之间加一条边，最多只能将两个连通分支连成一个。因此删除某条边不会使连通分支增加多于一个



连通性的度量 (续)



- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？





连通性的度量（续）



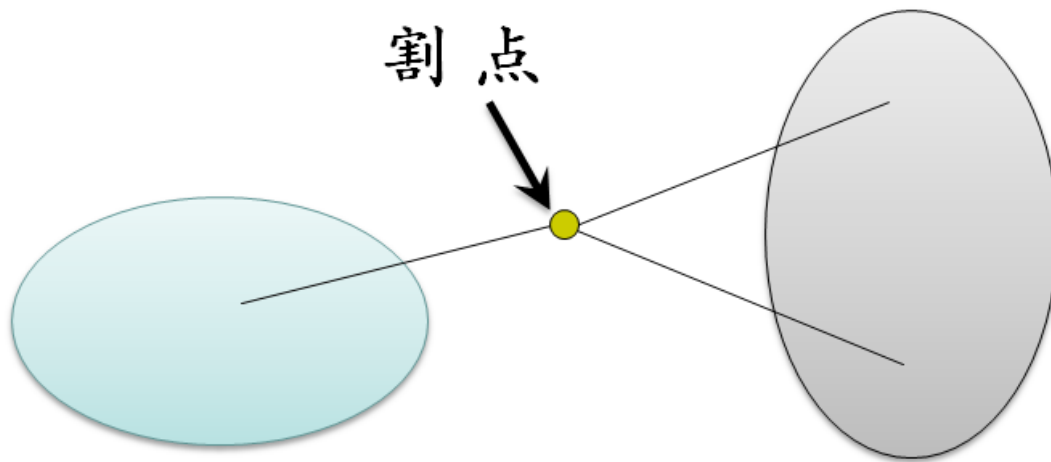
- 讨论：对图 G 进行哪些基本操作，会影响 G 的连通分支数 $p(G)$ ？
- (2) 点的删除可能导致连通分支数的增加或减少：
 $p(G) ? p(G - \{v\})$
 - $p(G) > p(G - \{v\})$ ：删除孤立顶点连通分支数会减少
 - $p(G) = p(G - \{v\})$ ：删除悬挂顶点连通分支数不变
 - $p(G) < p(G - \{v\})$ ：删除星图中间顶点会导致连通分支数增加任意有限多个



连通性的度量（续）



- **定义（点割集与割点）**：设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，若存在非空的 $V' \subset V$ 使得 $p(G - V') > p(G)$ 而对于任意的 $V'' \subset V'$ ，均有 $p(G - V'') = p(G)$ ，则称集合 V' 是 G 的**点割集**，若 $V' = \{v\}$ ，称 v 为**割点**





连通性的度量 (续)

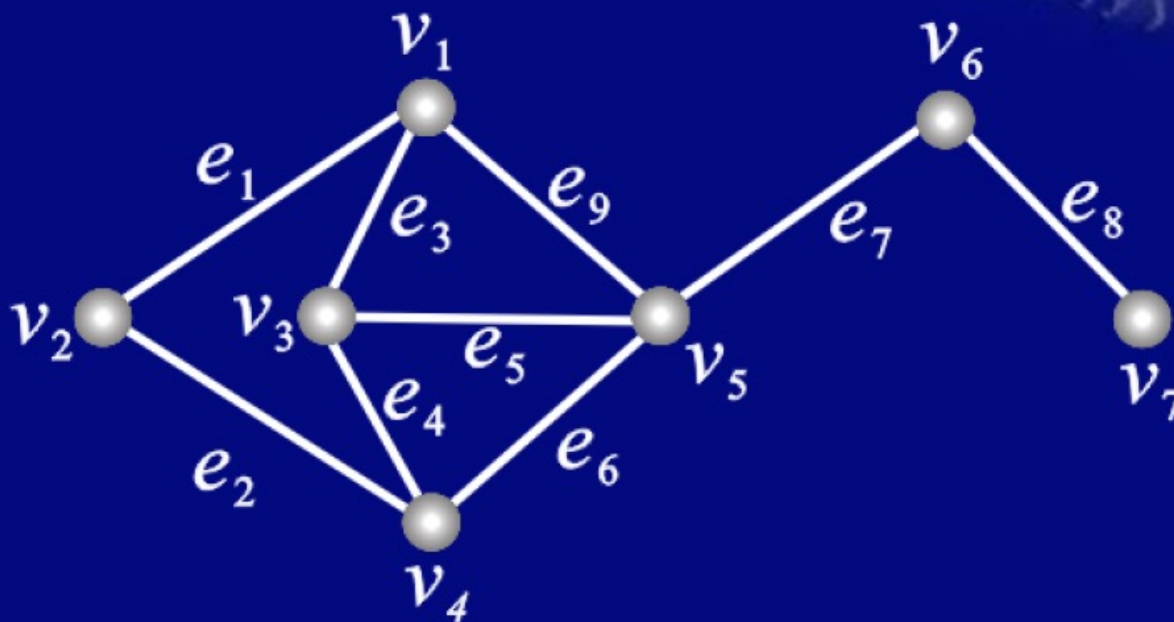


图 7

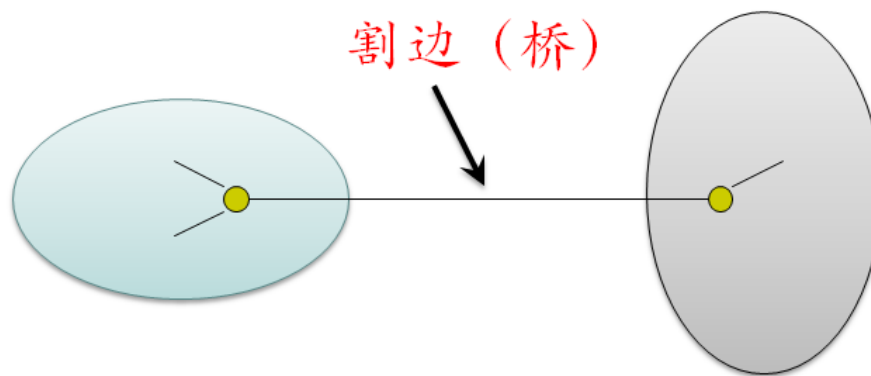
图 7 中, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_6\}$ 是点割集, v_6 是割点. $\{v_2, v_5\}$ 是点割集吗?



连通性的度量（续）



- **定义（边割集与割边）**：设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，若存在非空的 $E' \subset E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$ 而对于任意的 $E'' \subset E'$ ，均有 $p(G - E'') = p(G)$ ，则称集合 E' 是 G 的**边割集**，或简称**割集**，若 $E' = \{e\}$ ，称 e 为**割边**或**桥**





连通性的度量（续）



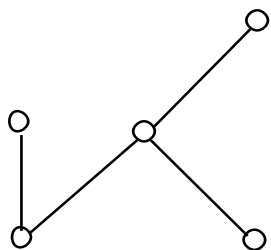
- **命题：** e 是割边当且仅当 e 不在 G 的任一简单回路上（注意：对割点则没有相应结论）
 - **证明：** \Rightarrow ：假设 C 是包含 $e = (x, y)$ 的简单回路，令 $C - \{e\} = P$ ， P 是不含 e 的 (x, y) - 简单通路。对 G 中任意顶点 u, v ，若 (u, v) - 通路中不含 e ，则该通路也是 $G - \{e\}$ 中的 (u, v) - 通路；若 (u, v) - 通路中含 e ，则将所有的 e 均替换为 P ，得到 $G - \{e\}$ 中的 (u, v) - 通路， $\therefore G - \{e\}$ 仍连通，与 e 是割边矛盾；
 \Leftarrow ：假设 $e = (x, y)$ 不是割边。则 $G - \{e\}$ 仍连通，设 P 是 $G - \{e\}$ 中的 (x, y) - 路径， P 中不含 e ，则： $P + \{e\}$ 是 G 中的简单回路，矛盾。 \square



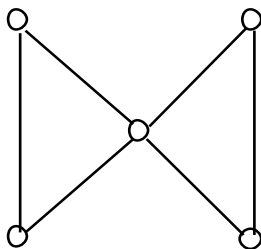
图的连通性的度量



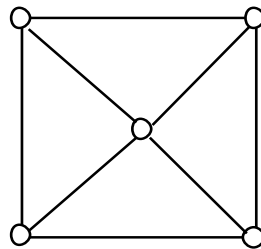
- 试观察以下4图中连通的“强度”或“牢度”



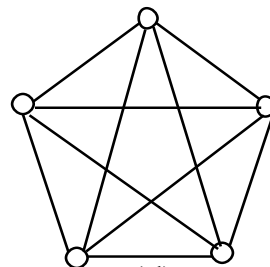
(a)



(b)



(c)



(d)

- 图a中删除任意一条边便不连通了
- 图b则至少要删除两条边或删除当中那个顶点才不连通
- 图c删除任意一个点都不可能不连通
- 图d至少要删除四条边才可能不连通，且不可能通过删除顶点使其不连通



图的连通性的度量（续）



- 如何来衡量图中**连通的程度**？一个科学的方法是看图中有多少“**关键**”的顶点或边，去除这些顶点或边可导致连通分支数的变化；因此可考虑用**点割集**和**边割集**的大小来度量连通性
- 那么，应该选取最小的点（边）割集还是最大的点（边）割集之大小来衡量呢？





图的连通性的度量 (续)





图的连通性的度量 (续)



性能信息和工具

控制面板 > 所有控制面板项 > 性能信息和工具

搜索控制面板

下一张

控制面板主页

调整视觉效果

调整索引选项

调整电源设置

打开磁盘清理

为计算机评分并提高其性能

Windows 体验指数可评估主要系统组件，分数范围从 1.0 到 9.9。

组件	评分的项目	子分数	基本分数
处理器:	每秒计算速度	7.1	4.8 由最低子分数决定
内存(RAM):	每秒内存运行速度	7.1	
图形:	桌面图形性能	4.8	
游戏图形:	3D 商务和游戏图形性能	5.8	
主硬盘:	磁盘数据传输速率	6.8	

查看和打印详细的性能和系统信息

你的分数是最新的
上次更新: 2013/9/5 20:58:21

重新运行评估



图的点连通度



- **定义（点连通度）**：使非平凡连通图 G 成为不连通图或者平凡图需要删除的最少顶点数称为图 G 的点连通度（或连通度），记为 $\kappa(G)$ ：

$$\kappa(G) = \min\{|T| \mid T \text{ 为 } G \text{ 的点割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除 $\kappa(G)$ 个点就一定会使该图不连通）

- **约定**：非连通图或者平凡图的连通度为0



图的点连通度（续）



- 定义（ k -连通图）：若图 G 的（点）连通度不小于 k ，称 G 是 k -(点)连通图
 - 也就是说： k -连通图同样是1-，2-，3-， \dots ， $(k-1)$ -连通图，或者说：对 k -连通图，如果删除少于 k 个顶点，它一定依然连通



图的边连通度



- **定义（边连通度）**：使非平凡连通图 G 成为不连通图或者平凡图需要删除的最少边数称为图 G 的边连通度，记为 $\lambda(G)$ ：

$$\lambda(G) = \min\{|S| \mid S \text{ 为 } G \text{ 的边割集}\}$$

（注意：这不意味着任意删除 $\lambda(G)$ 条边就一定会使该图不连通）

- **约定**：非连通图或者平凡图的边连通度为0



图的边连通度（续）



- 定义（ k -边连通图）：若图 G 的边连通度不小于 k ，称 G 是 k -边连通图
 - 也就是说： k -边连通图同样是1-，2-，3-， \dots ， $(k-1)$ -边连通图，或者说：对 k -边连通图，如果删除少于 k 条边，它一定依然连通

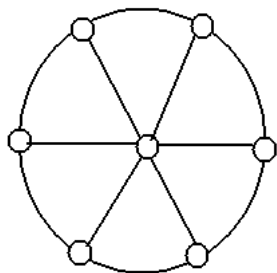


点连通度与边连通度的关系

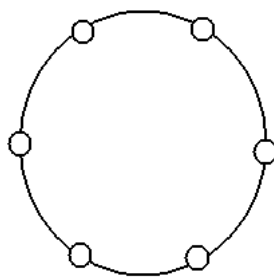


- 对6阶轮图 W_6 : $\kappa(W_6) = \lambda(W_6) = 3 = \delta(W_6)$
- 对6阶圈图 C_6 : $\kappa(C_6) = \lambda(C_6) = 2 = \delta(C_6)$
- 对完全二部图 $K_{2,3}$: $\kappa(K_{2,3}) = \lambda(K_{2,3}) = 2 = \delta(K_{2,3})$

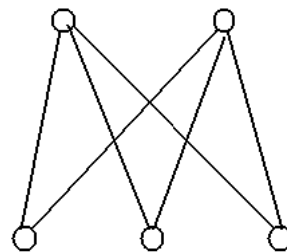
$$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) ?$$



W_6



C_6



$K_{2,3}$



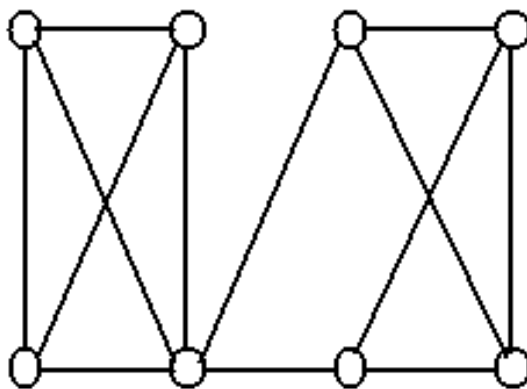
点连通度与边连通度的关系 (续)

~~$\kappa = \lambda = \delta$?~~

✓ $\kappa(G) = 1$

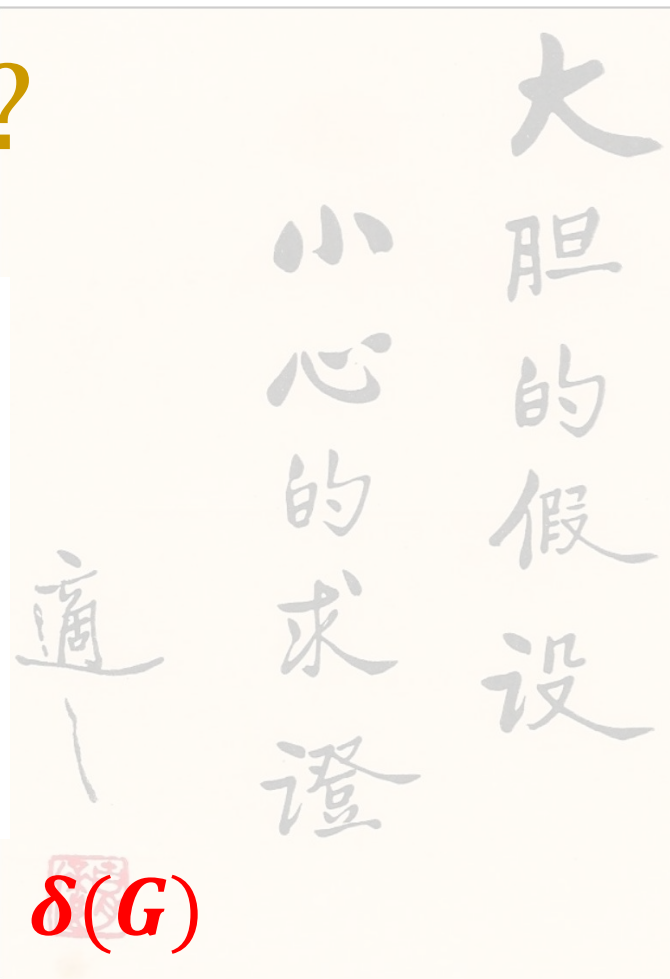
✓ $\lambda(G) = 2$

✓ $\delta(G) = 3$



G

■ 我们猜想: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$





点连通度与边连通度的关系 (续)

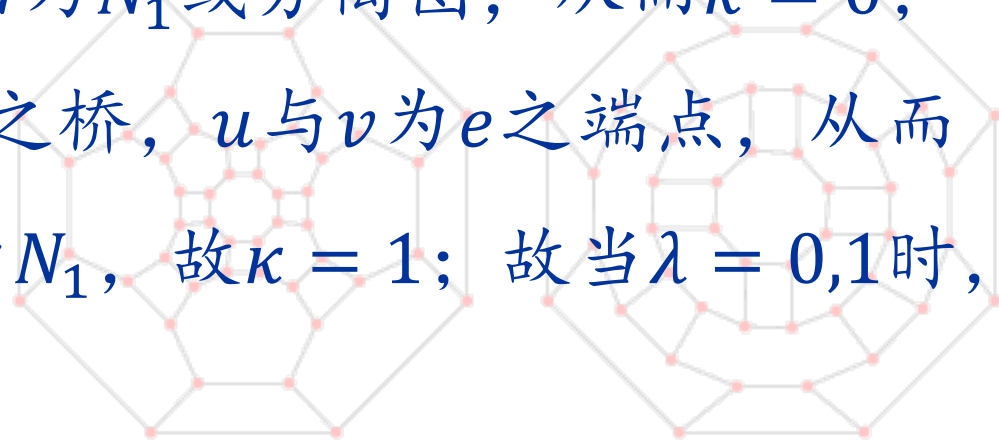


猜想: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

■ 证明: (1) $\kappa(G) \leq \lambda(G)$, 对边连通度 λ 进行归纳:

■ Basis: $\lambda = 0$ 时, G 为 N_1 或分离图, 从而 $\kappa = 0$;

$\lambda = 1$ 时, 设 e 为 G 之桥, u 与 v 为 e 之端点, 从而
 $G - \{u\}$ 不连通或为 N_1 , 故 $\kappa = 1$; 故当 $\lambda = 0, 1$ 时,
有 $\kappa \leq \lambda$;





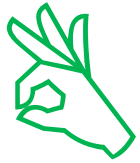
点连通度与边连通度的关系 (续)



- **证明:** (1) $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ (续)
- **I.H.:** 对任意图 G , $\lambda(G) = k$, 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) = k$
- **Ind. Step:** 设 H 为无向图且 $\lambda(H) = k + 1$, 设 $S = \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ 为 H 之最小边割集, 从而易见:
 $\lambda(H - \{e_0\}) = k$, 由 **I.H.** 知, $H - \{e_0\}$ 有点割集 T 且 $|T| \leq k$, 设 u 为 e_0 的一个端点, 从而 $T \cup \{u\}$ 为 H 的点割集, 故 $\kappa(H) \leq k + 1 = \lambda(H)$, 归纳完成. \square



点连通度与边连通度的关系 (续)



猜想: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

■ 证明: (2) $\lambda(G) \leq \delta(G)$

设 $v \in V(G)$ 且 $d(v) = \delta(G)$, 且 S 为与 v 关联的边的集合, 有 $|S| = \delta(G)$. $\therefore G - S$ 为 N_1 或分离图, $\therefore \lambda(G) \leq \delta(G)$. \square

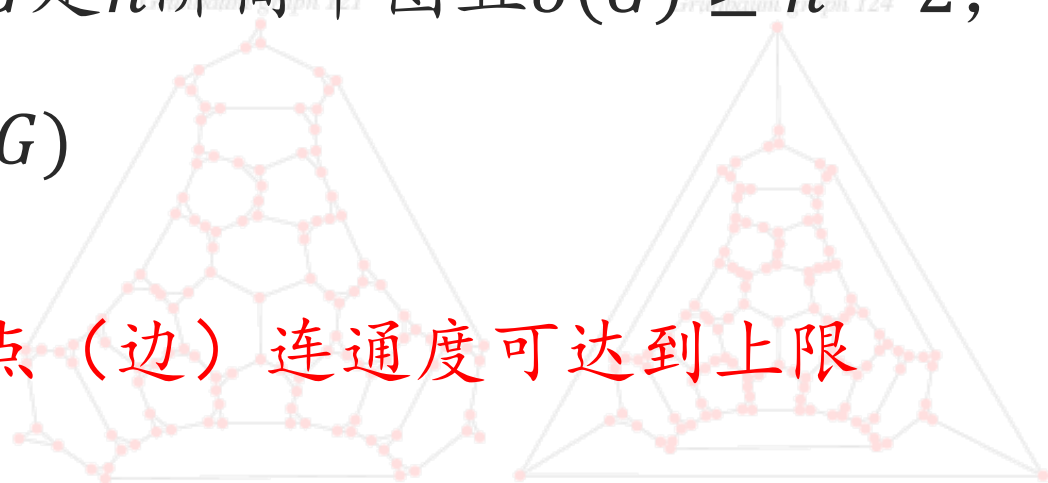
■ 故猜想成立 (Whitney, 1932)



点连通度与边连通度的关系 (续)



- **定理(Chartrand, 1966):** G 是 n 阶简单图且 $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$
- **定理(留作思考):** G 是 n 阶简单图且 $\delta(G) \geq n - 2$, 试证明: $\kappa(G) = \delta(G)$
- 上述情况下, 图之点(边)连通度可达到上限





点连通度与边连通度的关系 (续)

- **证明 (反证法)**：由于对于任意简单图 G ，有 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ ，假设已知条件下 $\lambda(G) = p < \delta(G)$ ，则存在最小边割集 $S \subseteq E(G)$ 使得 $|S| = p$ 且 $G - S$ 含两个连通分支 (回忆 $p(G - \{e\}) \leq p(G) + 1$) G_1 与 G_2 ；不妨设 $|G_1| \leq |G_2|$ ，则 $|G_1| \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ；由于 G 是简单图，故 G_1 中各顶点在原图 G 中的度数之和不大于 $K_{|G_1|}$ 的顶点度数之和加上已被删除的边数 p ，即： $\sum_{v \in V(G_1)} d(v) \leq |G_1|(|G_1| - 1) + p < |G_1|(|G_1| - 1) + \delta(G)$ ；注意 $|G_1| \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq \delta(G)$ (已知条件)，故有： $\sum_{v \in V(G_1)} d(v) < \delta(G)(|G_1| - 1) + \delta(G) = |G_1| \cdot \delta(G)$ ，即 G_1 子图的度数和小于 G_1 的度数下限，这显然不可能，故假设错误， $\lambda(G) = \delta(G)$. \square



点连通度与边连通度的上限*



- 定理 (Whitney, 1933) : 对任意图 G ,

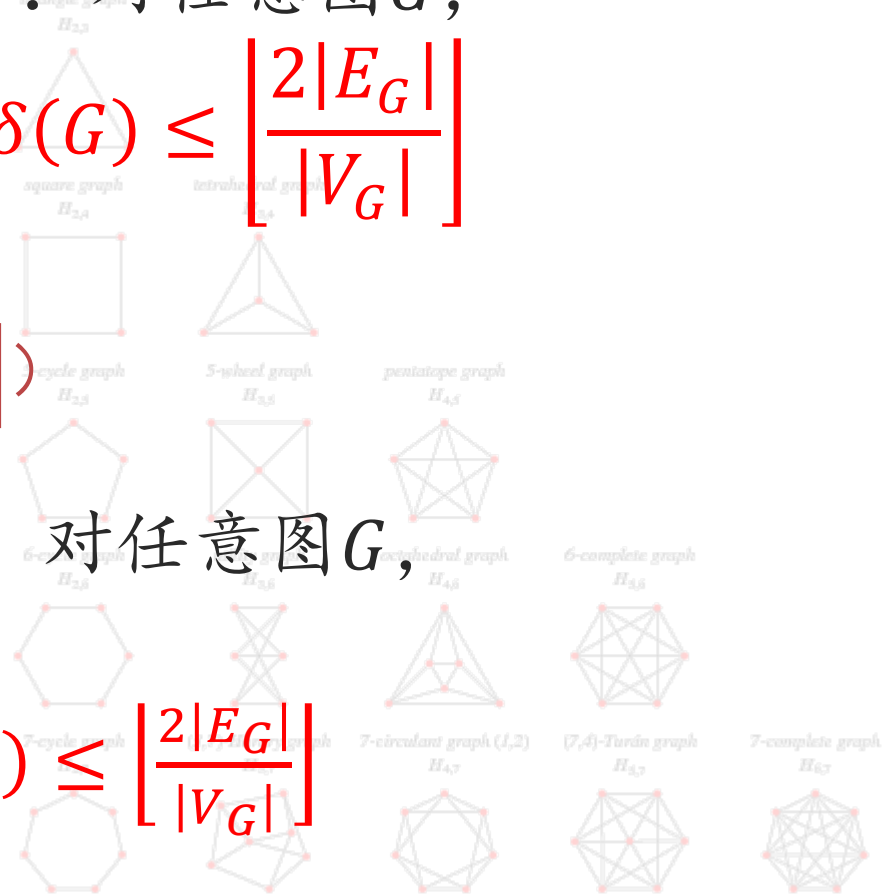
$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

(只需再证明 $\delta(G) \leq \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$)

- 定理 (Harary, 1962) : 对任意图 G ,

$$\kappa(G), \lambda(G) \leq \left\lfloor \frac{2|E_G|}{|V_G|} \right\rfloor$$

(不依赖上述结论, 证明超出范围)





连通度与点(边)不相交的通路*

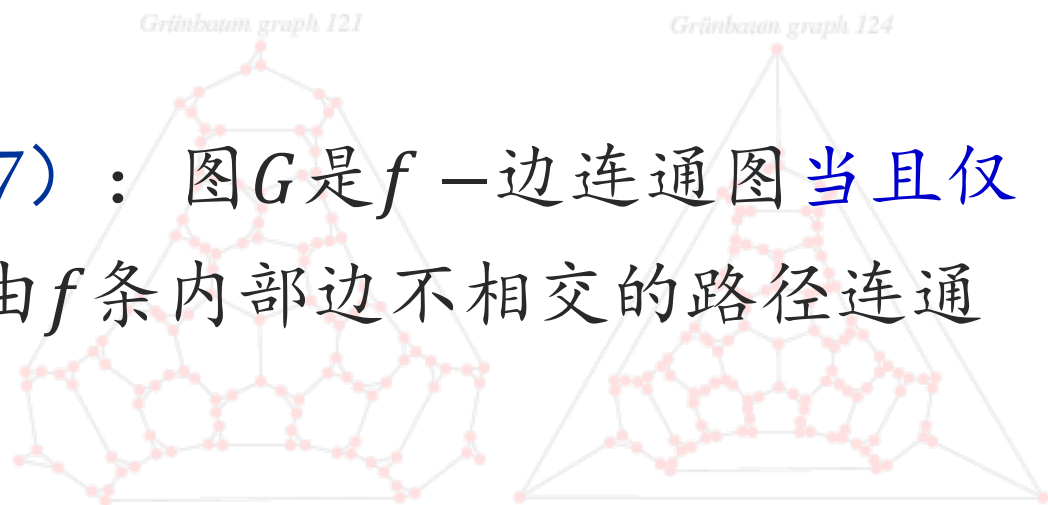


- **定理*** (Whitney, 1935) : 图 G 是 f -连通图当且仅当 G 中任意两点被至少 f 条内部 (即除端点外) 顶点不相交的路径连通

(证明超出范围)

- **定理*** (Menger, 1927) : 图 G 是 f -边连通图当且仅当 G 中任意两点至少由 f 条内部边不相交的路径连通

(证明超出范围)





本次课后作业



- 教材内容: [Rosen] 10.4.3 节
- 课后习题:
 - Problem Set 25
- 提交时间: 5月27日 10:00 前

