



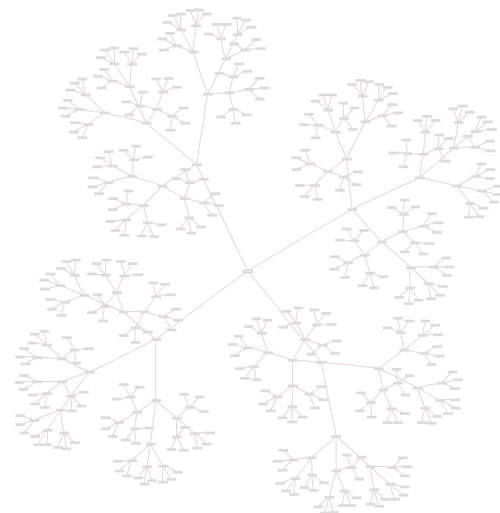
# 离散数学

## Discrete Mathematics

### 第二十七讲：树

吴楠

南京大学计算机学院



2025 年 5 月 30 日



# 前情提要



- 带权图
- 带权图的单源最短路
- 求最短路的算法思想
- Dijkstra算法
- Dijkstra算法的分析\*
- Dijkstra算法的应用及其它\*

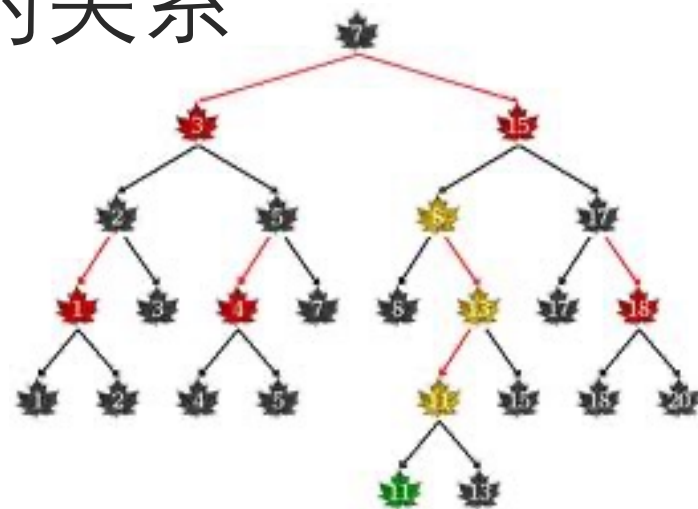
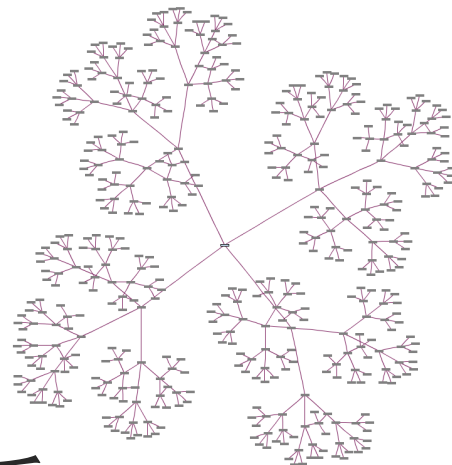




# 本讲主要内容



- 树的定义
- 树的连通性质
- 树中边和顶点数量之间的关系
- 生成树与最小生成树
- 求最小生成树的算法

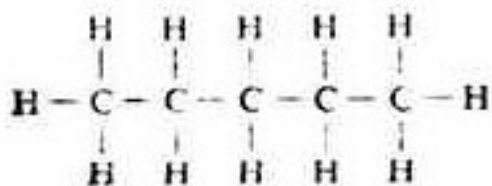




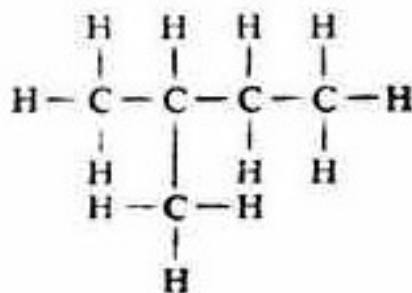
# 树的定义



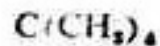
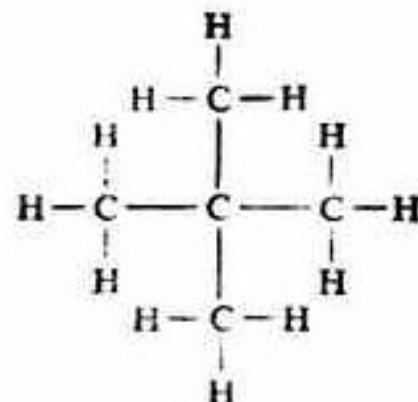
- **树**(tree)是一种特殊的图，滥觞于19世纪中叶，最初由Cayley提出并用于描述饱和烃的同分异构体



正戊烷  
熔点  $-130^\circ\text{C}$   
沸点  $36.1^\circ\text{C}$



异戊烷  
 $-160^\circ\text{C}$   
 $28^\circ\text{C}$



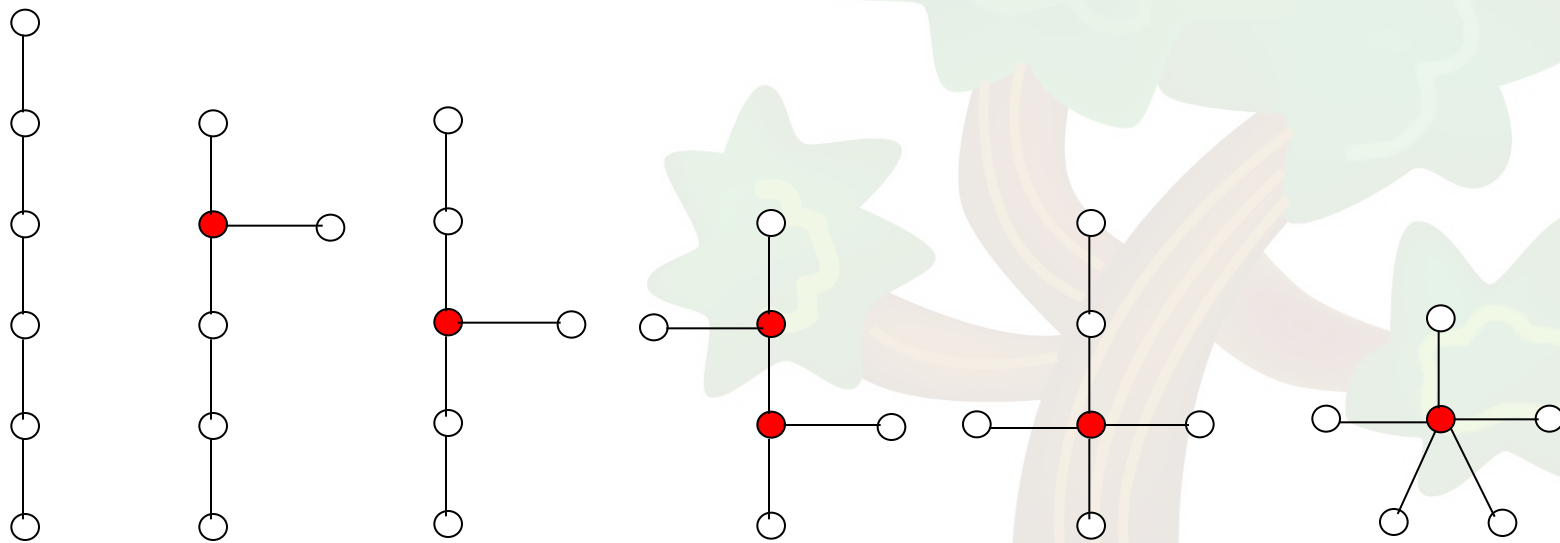
新戊烷  
 $-17^\circ\text{C}$   
 $9.5^\circ\text{C}$



# 树的定义 (续)



- **定义** (**树**) : 不含回路的连通简单图称为树
  - 以下列出**所有不同构的**6个顶点的树





# 有关树的概念



## 定义

- (1) 无向树——连通无回路的无向图
- (2) 平凡树——平凡图
- (3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成
- (4) 树叶——1 度顶点
- (5) 分支点——度数 $\geq 2$  的顶点

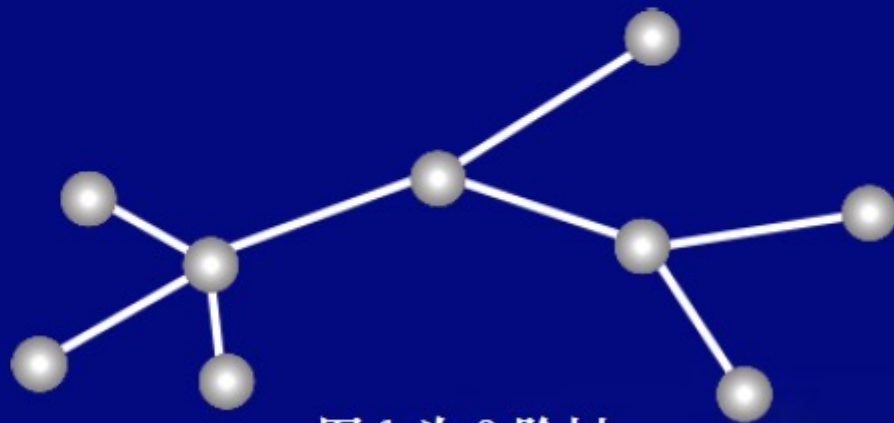


图 1 为 9 阶树.



# 树中的通路



■ **定理** (树中路径的唯一性) : 设 $T$ 是树, 则

$\forall u, v \in V(T)$ ,  $T$ 中存在**唯一的** $uv$ -路径

■ **证明**: 由定义,  $T$ 是连通图, 故 $\forall u, v \in V(T)$ ,  $T$ 中存在 $uv$ -路径。假设 $T$ 中有两条不同的 $uv$ -路径 $P_1, P_2$ 。不失一般性, 存在 $e = (x, y)$ 满足:  $e \in P_1$ 且在路径 $P_1$ 上 $x$ 比 $y$ 靠近 $u$ , 但 $e \notin P_2$ , 令 $T^* = T - \{e\}$ , 则 $T^*$ 中包含 $P_2$ , 于是:  
( $P_1$ 中的 $xu$ -段) +  $P_2$  + ( $P_1$ 中的 $vy$ -段) 是 $T^*$ 中的 $xy$ -通路, 所以 $T^*$ 中含 $xy$ -路径(记为 $P'$ ), 则 $P' + e$ 是 $T$ 中的**回路**, 与树的定义矛盾.  $\square$

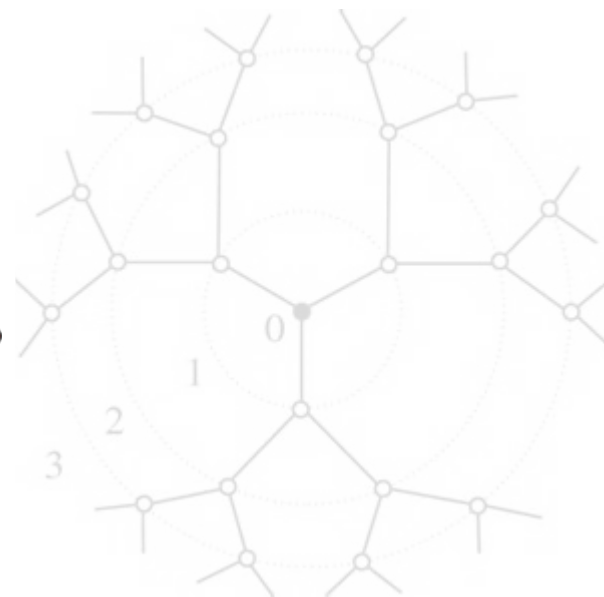
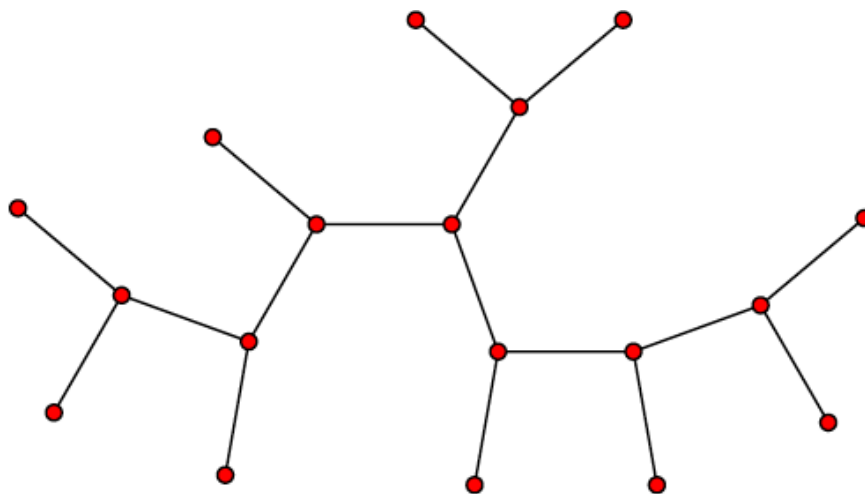


# 树中边的极限性



■ 树的边数从两个方面分别达到极限：

- 树是边最少的连通图
- 树是边最多的无回路图

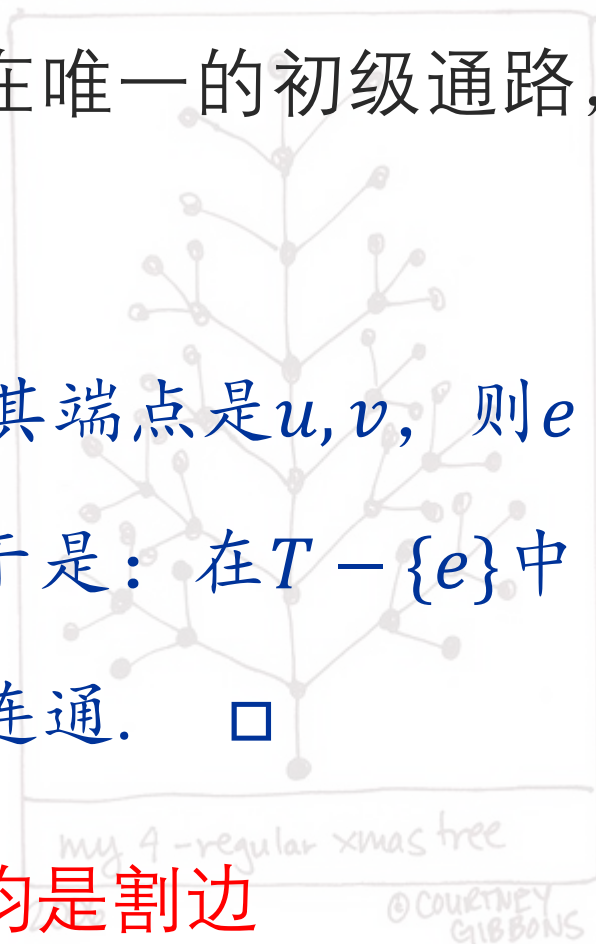




# 树是边最少的连通图



- **定理：** 设图 $T$ 的任意两顶点存在唯一的初级通路，  
则 $\forall e \in E(T)$ ,  $T - \{e\}$ 不连通
- **证明：** 设 $e$ 是 $T$ 中任意一条边，其端点是 $u, v$ ，则 $e$   
即 $u, v$ 之间唯一的初级通路，于是：在 $T - \{e\}$ 中  
不存在 $uv$ -通路， $\therefore T - \{e\}$ 不连通.  $\square$
- 这个定理这意味着**树中每条边均是割边**





# 树是边最多的无回路图



- **定理：** 设图 $T$ 是每条边均为割边的连通图，则 $T$ 中无回路，但在任意不相邻的两顶点之间加一条边，得到的图中恰含一个回路

- **证明：** (1)  $T$ 中不含回路

假设 $T$ 中有回路 $C$ ， $e = (u, v)$ 是 $C$ 上任意一条边， $\because e$ 是割边， $\therefore T^* = T - \{e\}$ 是非连通图， $\therefore u, v$ 处于不同的连通分支，但 $C - \{e\}$ 是 $T^*$ 中的 $uv$ -通路，矛盾。

- (2) 在任意两个不相邻的顶点之间加一条边，则产生回路

$T$ 中至少有3个顶点。设 $x, y$ 是不相邻的顶点， $\because T$ 连通， $\therefore$ 存在 $xy$ -通路 $P$ ，则 $P + (x, y)$ 是 $T + (x, y)$ 中的回路。

- (3)  $T + (x, y)$  的回路是唯一的

假设另有回路 $C' \neq P + (x, y)$ ， $\because T$ 中原无回路， $\therefore (x, y) \in C'$ ，而 $C' - (x, y) \neq P$ ，因此， $x, y$ 之间有两条不同的初级通路， $\therefore T$ 中含回路，矛盾。  $\square$



# 有关树的几个等价命题

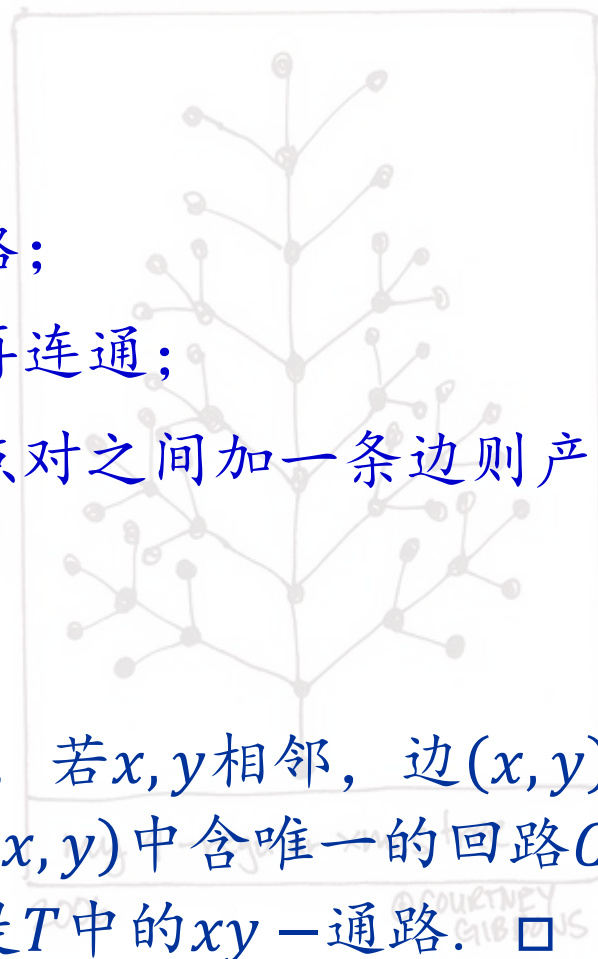


## ■ 下列四个命题等价：

- (1)  $T$  是不含回路的简单连通图；
- (2)  $T$  中任意两点之间有唯一初级通路；
- (3)  $T$  连通，但删除任意一条边则不再连通；
- (4)  $T$  无回路，但在任意不相邻的顶点对之间加一条边则产生唯一的回路

## ■ 这里只需再证明(4) $\Rightarrow$ (1)

只需证明连通性：对任意顶点对  $x, y$ ，若  $x, y$  相邻，边  $(x, y)$  即  $xy$ -通路，若  $x, y$  不相邻，则  $T + (x, y)$  中含唯一的回路  $C$ ，显然  $(x, y)$  在  $C$  中，因此： $C - (x, y)$  是  $T$  中的  $xy$ -通路。  $\square$





# 树中边和点的数量关系



- **定理：** 设 $T$ 是树，令 $n = |V(T)|$ ， $m = |E(T)|$ ，则：

$$m = n - 1$$

- **证明：** 对顶点数 $n$ 进行归纳：

- **Basis:** 当 $n = 1$ ， $T$ 是平凡图，结论显然成立；
- **I.H.:** 假设当 $n \leq k$ 结论成立；
- **Ind. Steps:** 若 $n = k + 1$ ，因为 $T$ 中每条边都是割边，任取 $e \in E(T)$ ， $T - \{e\}$ 含两个连通分支，设其为 $T_1, T_2$ ，并设它们边数分别是 $m_1, m_2$ ，顶点数分别是 $n_1, n_2$ ，根据归纳假设： $m_1 = n_1 - 1$ ， $m_2 = n_2 - 1$ ，注意： $n_1 + n_2 = n$ ， $m_1 + m_2 = m - 1$ ，故而 $m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1$ .  $\square$



# 连通图边数的下限



■ **定理**（连通图的必要条件）：连通图的必要

条件是： $m \geq n - 1$

○ 对于树： $m = n - 1$ ，因此**树是边最少的连通图**

■ **证明**：对顶点数 $n$ 进行归纳：**Basis**：当 $n = 2$ 时结论显然成立；

**I.H.**：假设 $n \leq k$ 时结论成立；**Ind. Steps**：若 $G$ 是满足 $n = k + 1$ 的连通图，考虑 $G' = G - v (v \in V(G))$ ，令 $|V(G')| = n'$ ， $|E(G')| = m'$ ：

(1) 若 $G'$ 仍连通，由归纳假设： $m' \geq n' - 1$ ，注意： $n' = n - 1$ ， $m' \leq m - 1$  ( $G$ 连通，故被删除的点至少关联一条边)，所以： $m \geq m' + 1 \geq n' - 1 + 1 = n - 1$

(续后)



# 连通图边数的下限 (续)



■ **定理** (连通图的必要条件) : 连通图的必要

条件是:  $m \geq n - 1$

■ **证明** (Ind. Steps 续) :

(2) 若 $G'$ 不连通, 设 $G'$ 有 $\omega(\omega > 1)$ 个连通分支 $G_1, G_2, \dots, G_\omega$ , 且 $G_i$ 的边数和顶点数分别是 $m_i$ 和 $n_i$ 。由归纳假设,  $m_i \geq n_i - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, \omega$ )。注意:  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\omega + 1$ ,  $m \geq m_1 + m_2 + \dots + m_\omega + \omega$  (即每个连通分支中至少有一个顶点在 $G$ 中与被删除的 $v$ 相邻, 即 $v$ 的度数不小于 $\omega$ ) , 所以:  $m \geq m_1 + m_2 + \dots + m_\omega + \omega \geq n_1 + n_2 + \dots + n_\omega - \omega + \omega = n - 1$ .  $\square$

SPANNING TREE □  
2007 ©COURTNEY GIBBONS



# 与边点数量关系有关的等价命题



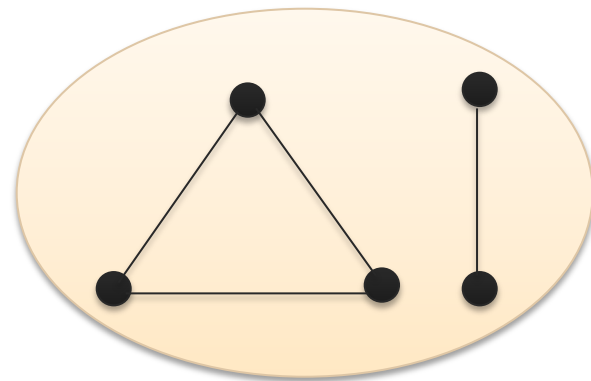
■ 注意：对任意图， $m = n - 1$  **不是** 树的充分条件

■ 下列三个命题等价：

(1)  $T$  是树

(2)  $T$  不含回路，且  $m = n - 1$

(3)  $T$  连通，且  $m = n - 1$



○ 证明：(1) $\Rightarrow$ (2) 已证；(2) $\Rightarrow$ (3)：若不连通，分支数  $\omega \geq 2$  则  $m = \sum_{i=1}^{\omega} n_i - 1 = n - \omega < n - 1$ ，矛盾；(3) $\Rightarrow$ (1)：设  $e$  是  $T$  中任意一边，令  $G' = T - e$ ，且其边数和顶点数分别是  $m'$  和  $n'$ ，则  $m' = m - 1 = n - 2 < n - 1$ ， $\therefore G'$  是非连通图，即  $T$  的任意边均不在回路中， $\therefore T$  中无回路。  $\square$



# 课堂练习



■ **试证明：**恰有2个1度顶点的树必为一链

■ **证明：**

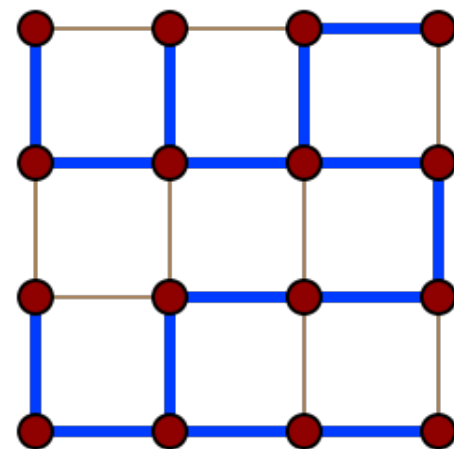
设 $T$ 是一棵具有两个1度点的树， $m$ 为边数，则 $m = n - 1$ 且 $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m = 2(n - 1)$ ；又因 $T$ 连通且除了两个1度点外其余点的度数均大于或等于2，而 $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2 + \sum_{i=1}^{n-2} d(v_i)$ ；因此： $2(n - 1) = 2 + \sum_{i=1}^{n-2} d(v_i)$ ，即 $\sum_{i=1}^{n-2} d(v_i) = 2(n - 2)$ 。这表明 $n - 2$ 个分支点的度数都恰为2，即 $T$ 为一链。 □



# 生成树 (spanning tree)



- **定义 (生成树)**：若图 $G$ 的生成子图是树，则该子图称为 $G$ 的**生成树**
- **定理 (生成树存在定理)**：无向图 $G$ 有生成树当且仅当 $G$ **连通**
- **证明**： $\Rightarrow$ ：显然成立；  
 $\Leftarrow$ ：若 $G$ 是有回路的连通图，删除回路上的一条边， $G$ 中的回路一定减少——此为图论证明常用之“**破圈法**”——用“破圈法”总可以构造连通图的生成树。  $\square$
- **推论**：简单无向图 $G$ 是树当且仅当 $G$ 有**唯一**的生成树

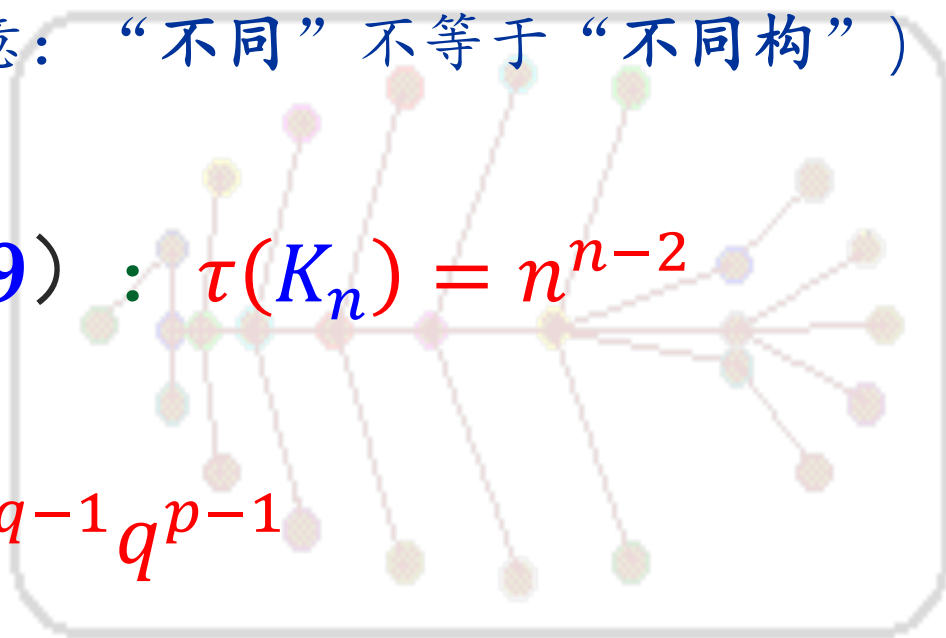




# 生成树的计数\*



- **定义：** 设 $G$ 为无向连通图， $\tau(G)$ 为 $G$ 的不同生成树的个数（注意：“不同”不等于“不同构”）
- **定理（Cayley 1889）：**  $\tau(K_n) = n^{n-2}$
- **定理：**  $\tau(K_{p,q}) = p^{q-1}q^{p-1}$





# 求生成树的算法



- 求连通图 $G$ （设其边集为 $\{e_1, \dots, e_m\}$ ）的生成树的算法可归为两类——“破圈法”和“避圈法”：

破圈法( $G$ )

```
1   $T \leftarrow G$   
2  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$   
3      do if  $e_i$  在  $T$  的回路上  
4          then  $T \leftarrow T - e_i$ 
```

避圈法( $G$ )

```
1   $T \leftarrow \emptyset$   
2  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$   
3      do if  $G[T \cup \{e_i\}]$  无回路  
4          then  $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$   
5           $T \leftarrow G[T]$   
6
```



# 最小生成树 (MST)



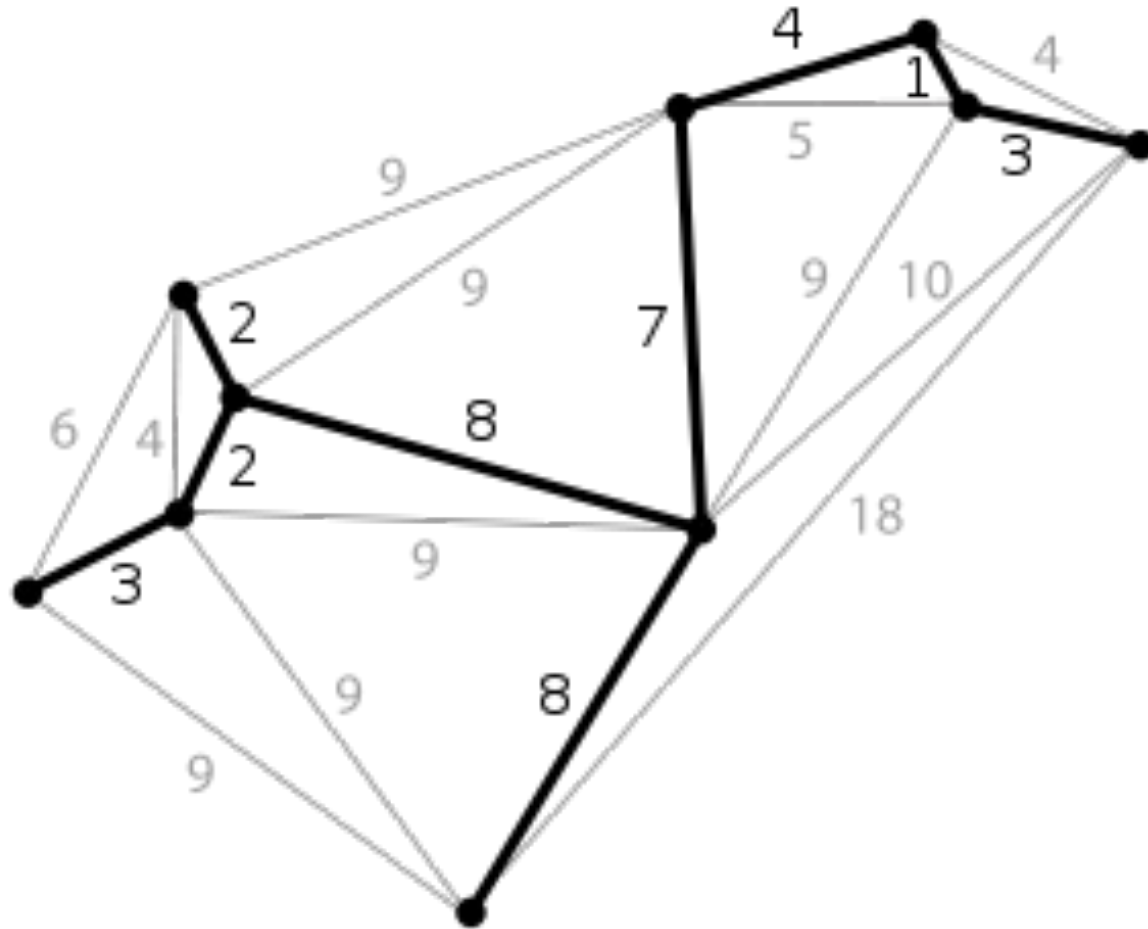
- **定义（子图的权）**：设  $G = \langle V, E, w \rangle$  为带权无向图， $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ ，对于  $e \in E(G)$ ， $w(e)$  为边  $e$  之权。设  $S$  为  $G$  之子图，定义  $S$  的权为：

$$w(S) = \sum_{e \in E(S)} w(e)$$

- **定义（最小生成树）**：设  $T$  为  $G$  之生成树，若对任何  $G$  的生成树  $T'$  有  $w(T') \geq w(T)$ ，则称  $T$  为**最小生成树**（minimum spanning tree, MST）

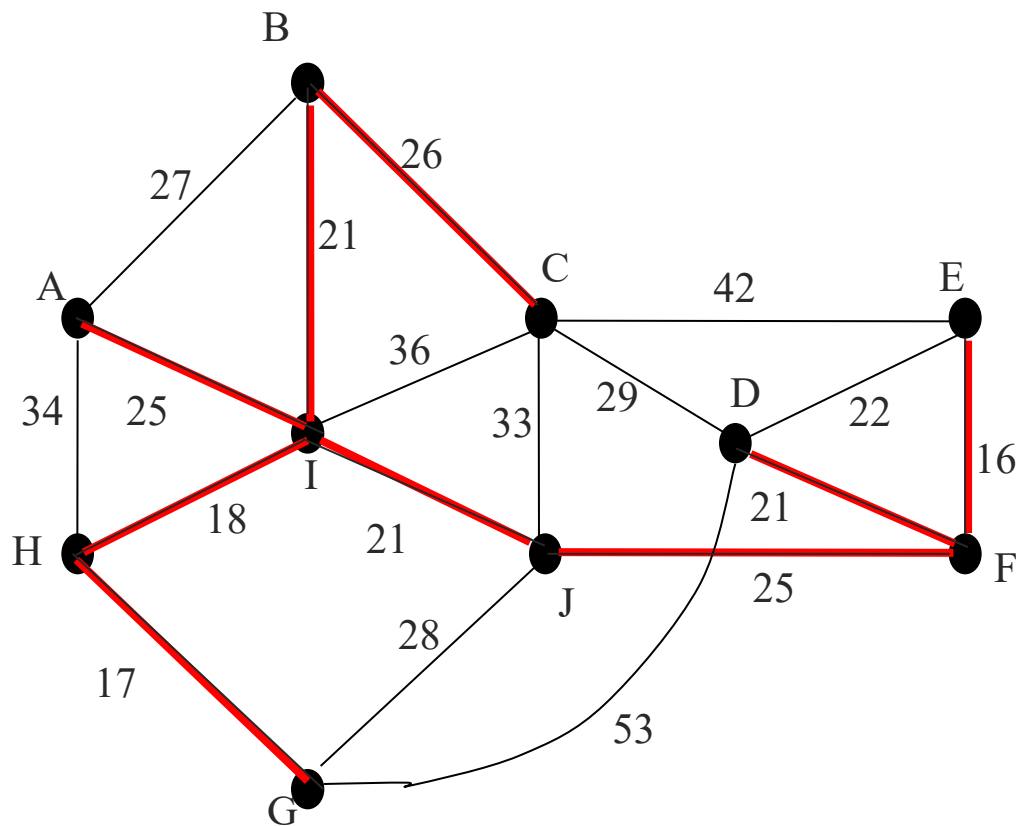


# 最小生成树 (续)





# 求最小生成树的Kruskal算法



算法：Kruskal (1956)

1.  $E = \{\}$ ;
2. 从 $E$ 以外选择权尽可能小，又不会与 $E$ 中已有的边构成回路的边加入 $E$ ;
3. 重复第2步，直到 $E$ 中包含 $n-1$ 条边;
4. 算法结束



# 求最小生成树的Kruskal算法 (续)



KRUSKAL ALGORITHM( $E$ )

- 1  $T^* \leftarrow$  空图
- 2 **for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $n - 1$
- 3     **do**  $e_i \leftarrow e$  其在  $E - \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  中极小且  $T^* + e_i$  无回路
- 4      $T^* \leftarrow T^* + e_i$
- 5 **return**  $T^*$



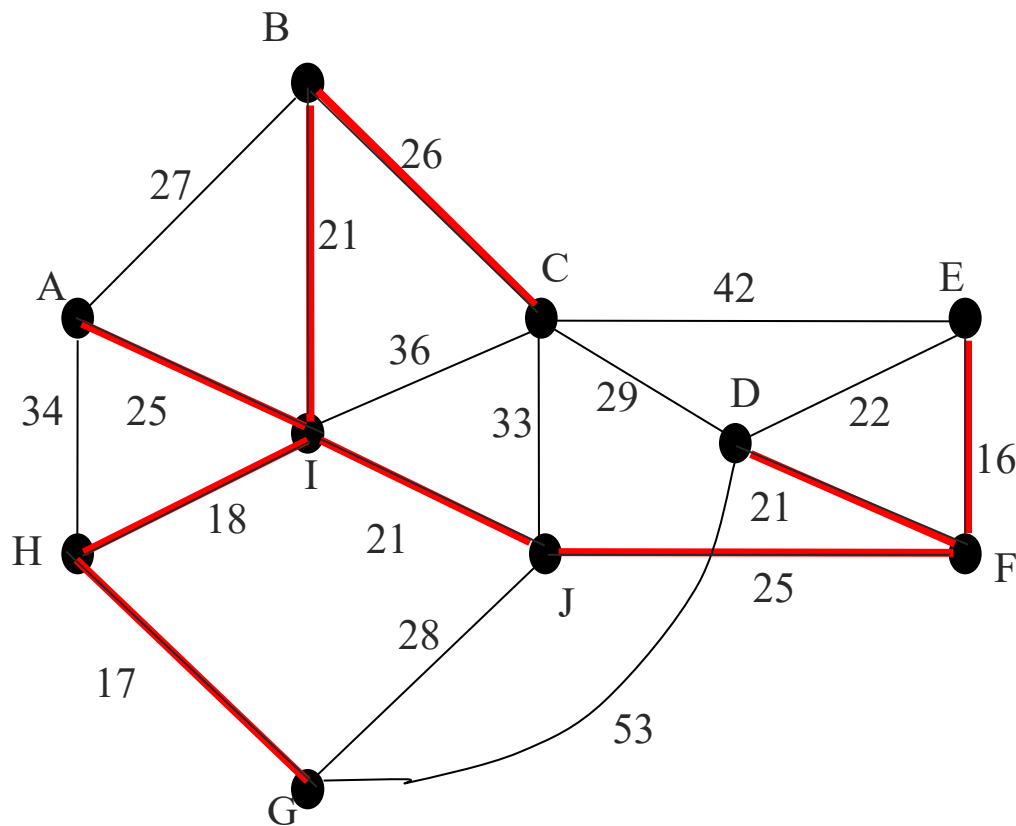
# Kruskal算法的证明\*



- (1) 显然 $T$ 是生成树
- (2) 假设 $T$ 不是最小生成树；按算法的加边顺序， $T$ 中边是 $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k, \dots, e_{n-1}$ 。而 $T'$ 是从开始与 $T$ 有最多连续公共边的最小生成树 $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e'_k, \dots$ ； $e_k$ 是第一个不在 $T'$ 中的边。 $T' + e_k$ 含回路，且该回路上的 $e'_k$ 不在 $T$ 中<sup>†</sup>，则 $T^* = T' - \{e'_k\} \cup \{e_k\}$ 也是生成树，而且 $w(T^*) = w(T') - w(e'_k) + w(e_k)$ ，根据算法的选边标准，必有 $w(e'_k) \geq w(e_k)$ ， $\therefore w(T^*) \leq w(T')$ ，即 $T^*$ 也是最小生成树，但 $T^*$ 从开始与 $T$ 的连续公共边数多于 $T'$ ，矛盾。□



# 求最小生成树的Prim算法\*



## 算法：Prim (1957)

1. 选取一条极小权边  $e_1$
2.  $T = \{e_1\}$
3. 从  $T$  以外选择与  $T$  中一点邻接且权尽可能小，又不会与  $T$  中已有边构成回路的边加入  $T$
4. 重复第2步，直到  $E$  中包含  $n - 1$  条边
5. 算法结束



# 求最小生成树的Prim算法\* (续)



PRIM ALGORITHM( $G : n$  阶无向连通带权图)

- 1  $e_1 \leftarrow$  一条极小权边
- 2  $T \leftarrow \{e_1\}$
- 3 **for**  $i \leftarrow 2$  **to**  $n - 1$
- 4     **do**  $e_i \leftarrow e$  其为在  $E - \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  中
- 5         使与  $T$  的一点邻接且  $T + e$  无回路的具极小权的边
- 6          $T \leftarrow T + e_i$
- 7 **return**  $T$



# 求最小生成树的破圈算法\*



- 1975年我国数学家管梅谷（1934—）提出求最小生成树的破圈算法：其思想为在给定的图中任意找出一个回路，删去该回路中权最大的边。然后在余下的图中再任意找出一个回路，再删去这个新找出的回路中权最大的边，一直重复上述过程，直到剩余的图中没有回路。这个没有回路的剩余图便是最小生成树



# Tips: 生成树的计数



## Counting spanning trees

[[edit](#)]

The number  $t(G)$  of spanning trees of a connected graph is an important [invariant](#). In some cases, it is easy to calculate  $t(G)$  directly. It is also widely used in data structures in different computer languages. <sup>[[citation needed](#)]</sup> For example, if  $G$  is itself a tree, then  $t(G)=1$ , while if  $G$  is the [cycle graph](#)  $C_n$  with  $n$  vertices, then  $t(G)=n$ . For any graph  $G$ , the number  $t(G)$  can be calculated using [Kirchhoff's matrix-tree theorem](#) (follow the link for an explicit example using the theorem).

**Cayley's formula** is a formula for the number of spanning trees in the [complete graph](#)  $K_n$  with  $n$  vertices. The formula states that  $t(K_n)=n^{n-2}$ . Another way of stating Cayley's formula is that there are exactly  $n^{n-2}$  labelled trees with  $n$  vertices. Cayley's formula can be proved using Kirchhoff's matrix-tree theorem or via the [Prüfer code](#).

If  $G$  is the [complete bipartite graph](#)  $K_{p,q}$ , then  $t(G)=p^{q-1}q^{p-1}$ , while if  $G$  is the  $n$ -dimensional [hypercube graph](#)  $Q_n$ , then  $t(G)=2^{2^n-n-1} \prod_{k=2}^n k^{\binom{n}{k}}$ . These formulae are also consequences of the matrix-tree theorem.

If  $G$  is a [multigraph](#) and  $e$  is an edge of  $G$ , then the number  $t(G)$  of spanning trees of  $G$  satisfies the *deletion-contraction recurrence*  $t(G)=t(G-e)+t(G/e)$ , where  $G-e$  is the multigraph obtained by deleting  $e$  and  $G/e$  is the [contraction](#) of  $G$  by  $e$ , where multiple edges arising from this contraction are not deleted.



WIKIPEDIA  
The Free Encyclopedia



# 本次课后作业



- 教材内容: [Rosen] 11.1, 11.5 节
- 课后习题:
  - Problem Set 27
- 提交时间: 6月6日 14:00 前

