



# 离散数学

## Discrete Mathematics

### 第二讲：命题逻辑的推理理论

吴楠

南京大学计算机学院

2025年2月21日



# 前情提要



- 离散数学：写在前面的话
- 逻辑与命题
- 命题联结词
- 自然语言命题的形式化
- 命题逻辑等值演算
- 范式与命题逻辑的可判定性（自学内容）

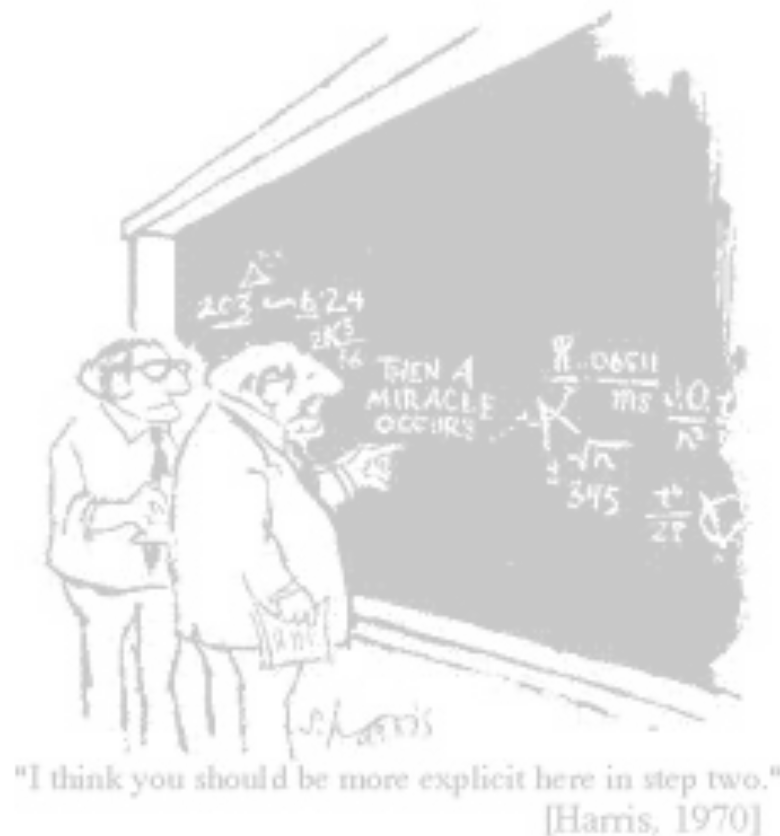




# 本讲主要内容



- 哲学逻辑的演化
- 逻辑推理
- 命题逻辑中的推理
- 公理推理系统\*
- 自然推理系统
- 用命题逻辑进行推理



SCIENCE OFFERS THE BOLDEST METAPHYSICS OF THE AGE. IT IS A THOROUGHLY HUMAN CONSTRUCT, DRIVEN BY THE FAITH THAT IF WE DREAM, PRESS TO DISCOVER, EXPLAIN, AND DREAM AGAIN, THEREBY PLUNGING REPEATEDLY INTO NEW TERRAIN, THE WORLD WILL SOMEHOW COME CLEARER AND WE WILL GRASP THE TRUE STRANGENESS OF THE UNIVERSE. AND THE STRANGENESS WILL ALL PROVE TO BE CONNECTED, AND MAKE SENSE.

E. O. WILSON





# 科学研究的哲学基础



“Development of western science is based on two great achievements: the invention of the **formal logical system** (*in Euclidean geometry*) by the Greek philosophers, and the discovery of the possibility to find out causal relationships by **systematic experiment** (*during the Renaissance*). ”

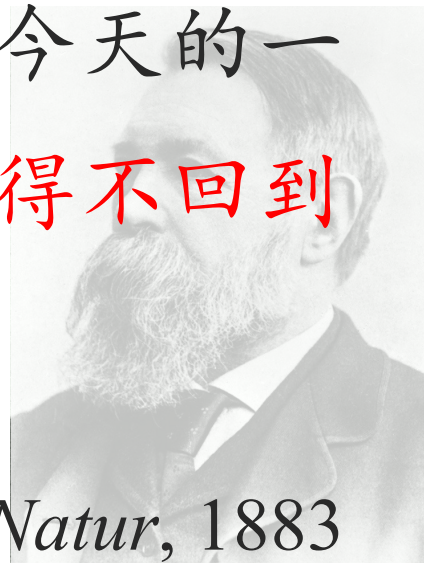
—— Albert Einstein, 1953



# 科学研究的哲学基础（续）



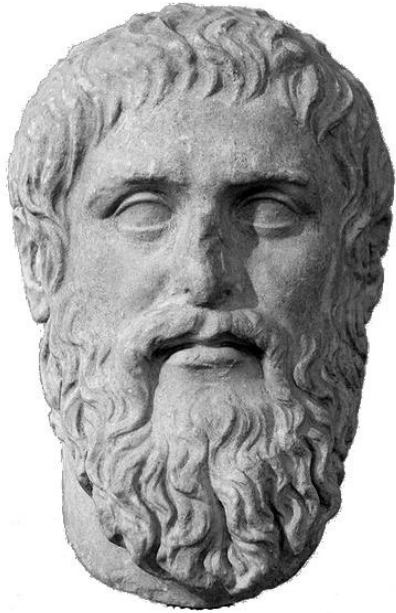
「在希腊哲学的多种多样的形式中，差不多可以找到以后各种观点的胚胎与萌芽。因此，如果理论自然科学要追溯自己今天的一般原理发生和发展的历史，它也不得不回到希腊人那里去。」



—— Friedrich Engels: *Dialektik der Natur*, 1883

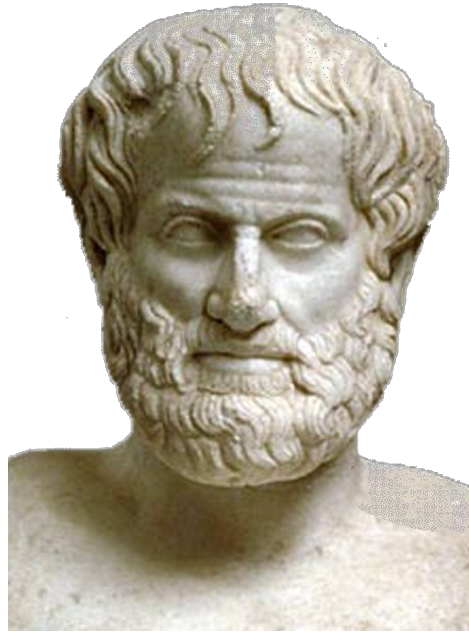


# 哲学逻辑的演化



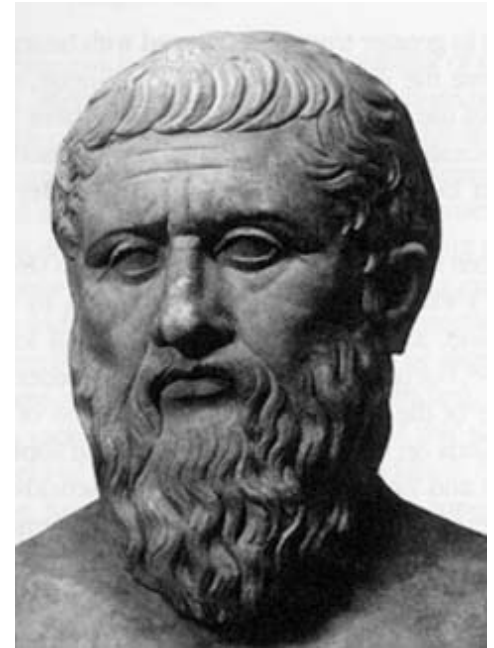
**Plato**

(c. 427 – c. 347 B.C.)



**Aristotle**

(384 – 322 B.C.)

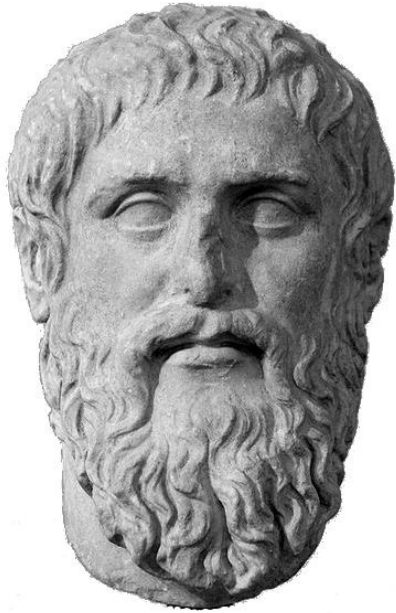


**Euclid**

(c. 323 – c. 283 B.C.)

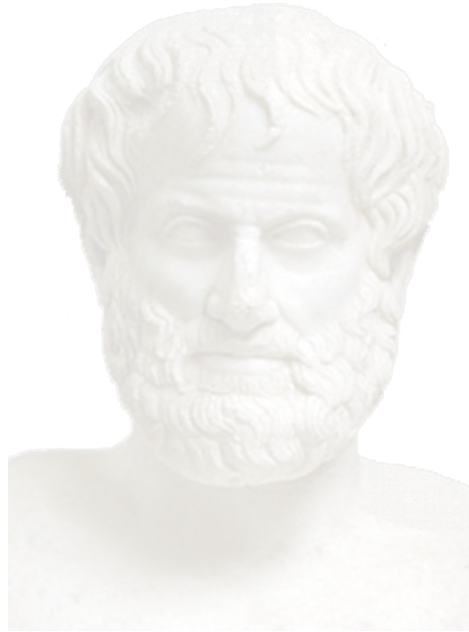


# 哲学逻辑的演化



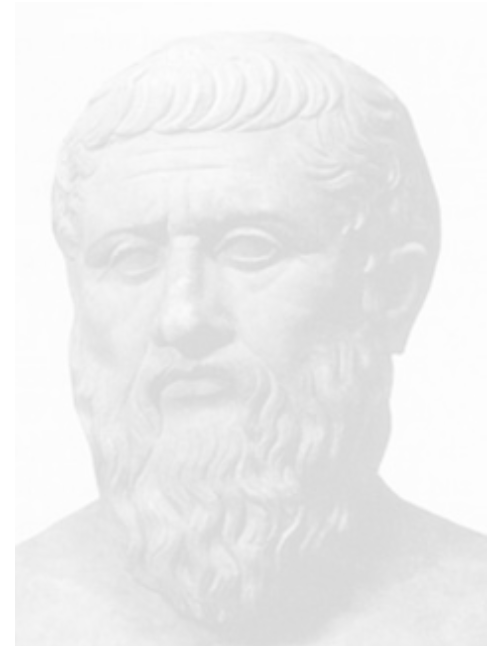
**Plato**

(c. 427 – c. 347 B.C.)



**Aristotle**

(384 – 322 B.C.)

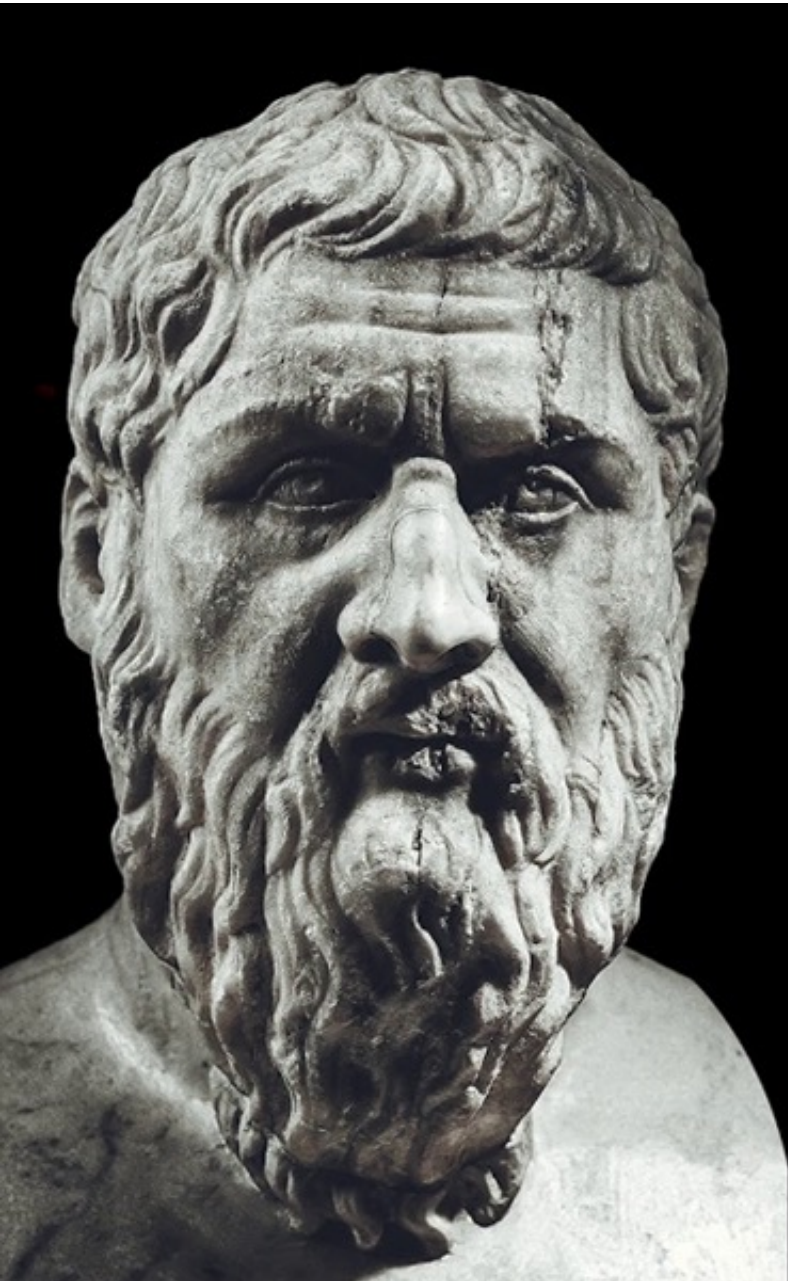


**Euclid**

(c. 323 – c. 283 B.C.)

Jacques-Louis David: *La Mort de Socrate*





THE ONLY TRUE BEING  
IS FOUNDED UPON **THE**  
**FORMS**: THE ETERNAL,  
UNCHANGEABLE,  
PERFECT TYPES, OF  
WHICH PARTICULAR  
OBJECTS OF SENSE ARE  
**IMPERFECT COPIES.**

—— *PLATONISM*



# 数学柏拉图主义 (Mathematical Platonism)



## ◆ EXISTENCE (数学的存在性)

There **ARE** mathematical objects.

## ◆ ABSTRACTNESS (数学的抽象性)

Mathematical objects are **ABSTRACT**.

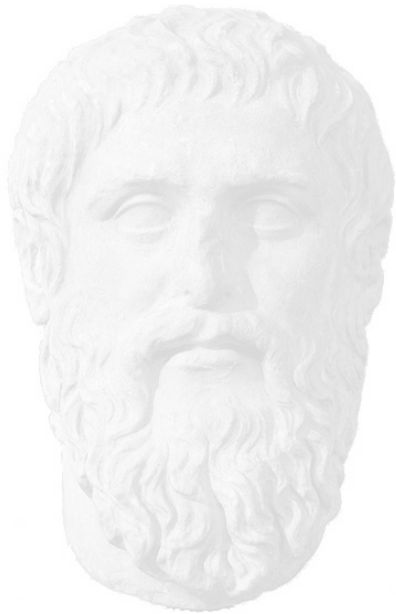
## ◆ INDEPENDENCE (数学的独立性)

Mathematical objects are **INDEPENDENT**  
of intelligent agents and their language,  
thought, and practices.



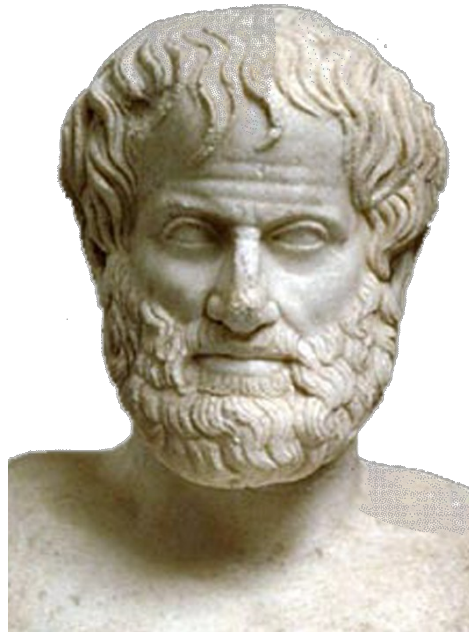


# 哲学逻辑的演化



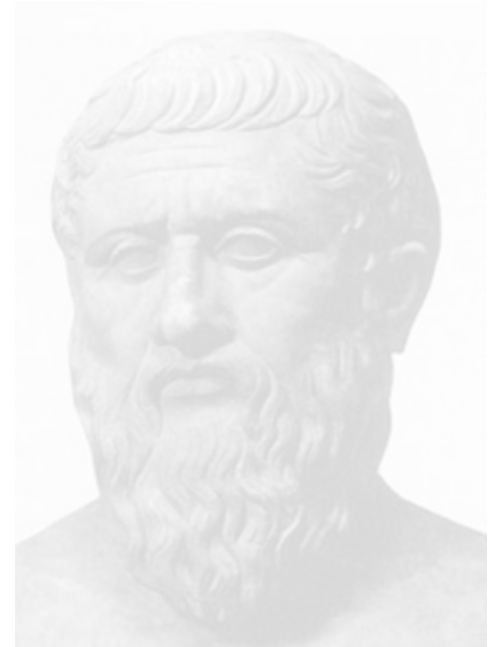
**Plato**

(c. 427 – c. 347 B.C.)



**Aristotle**

(384 – 322 B.C.)



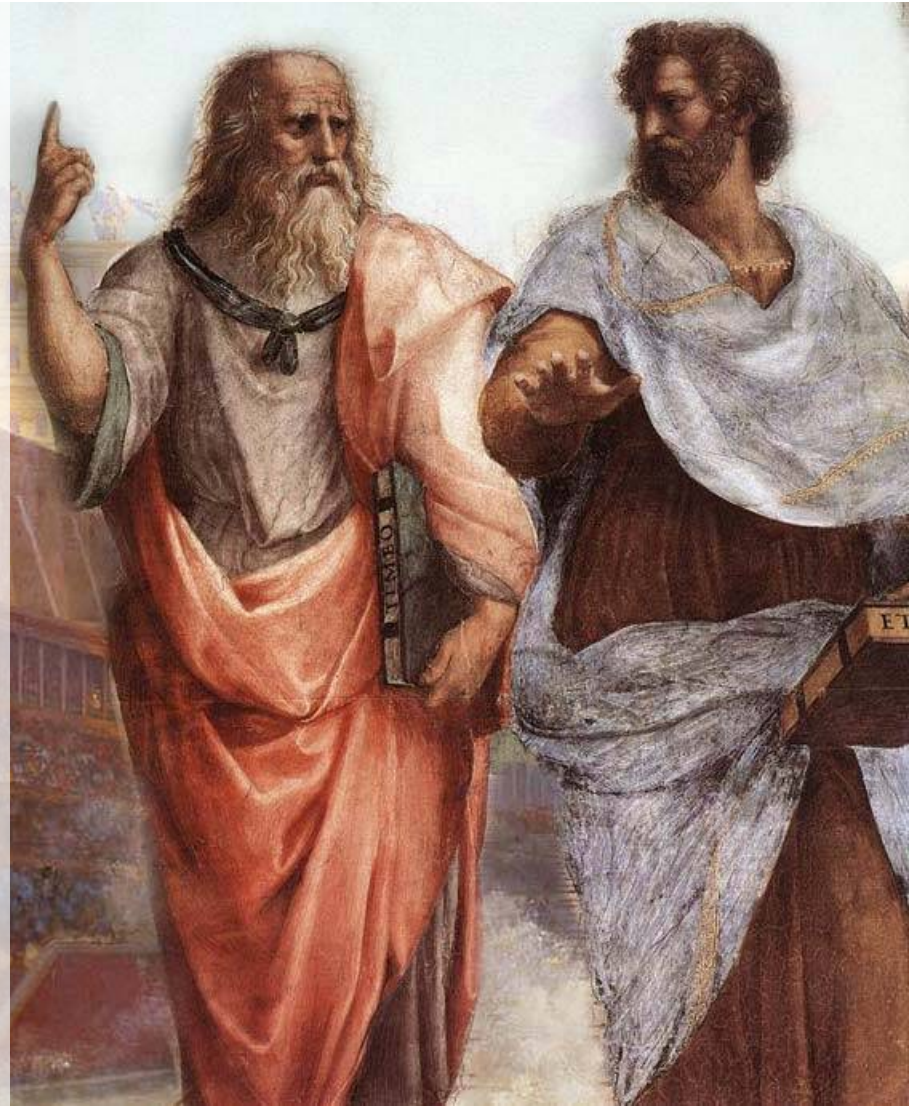
**Euclid**

(c. 323 – c. 283 B.C.)

*Amicus Plato, sed  
magis amica veritas.*

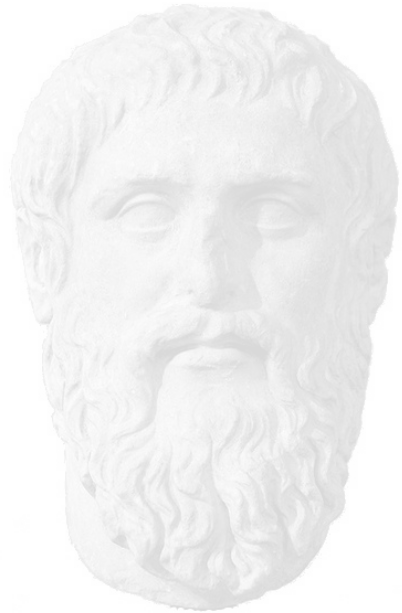
— *ARISTOTLE*

( Plato is my friend, but  
truth is a better friend. )



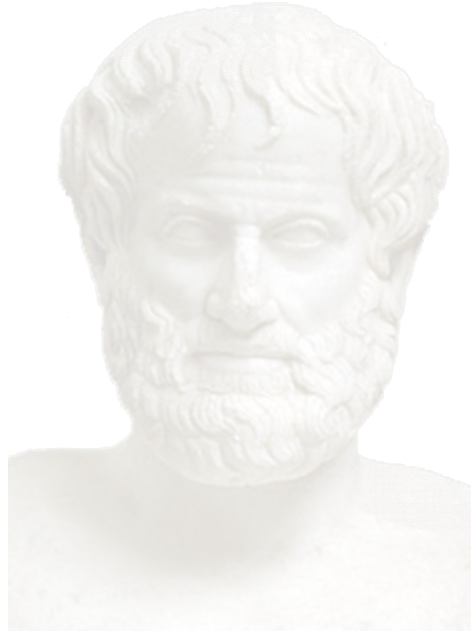


# 哲学逻辑的演化



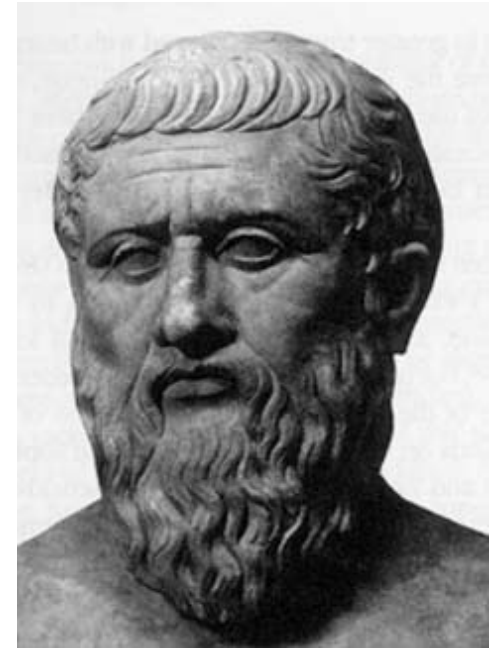
**Plato**

(c. 427 – c. 347 B.C.)



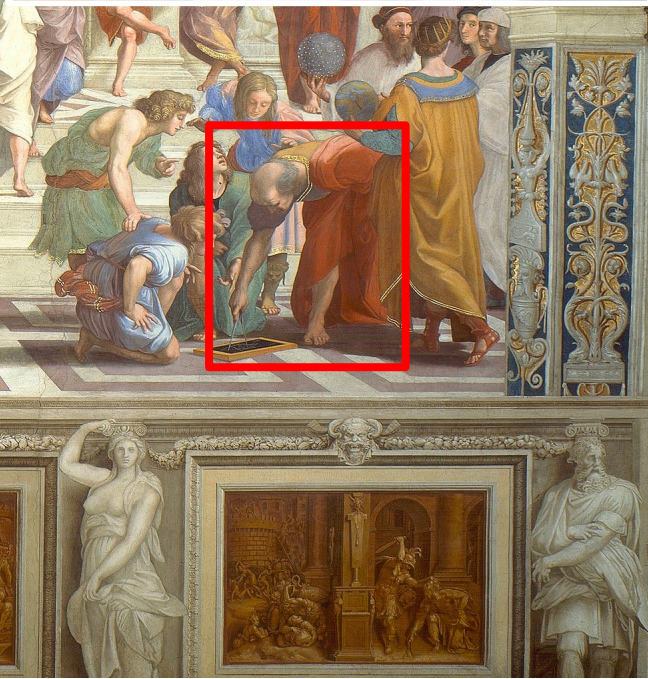
**Aristotle**

(384 – 322 B.C.)



**Euclid**

(c. 323 – c. 283 B.C.)

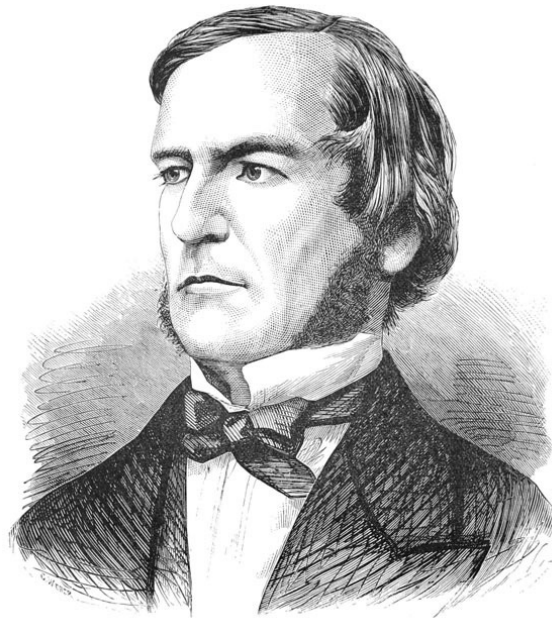




# 哲学逻辑的演化 (续)



**Leibniz**  
( 1646 – 1716 )



**G. Boole**  
( 1815 – 1864 )



**G. Frege**  
( 1848 – 1925 )



# 逻辑推理



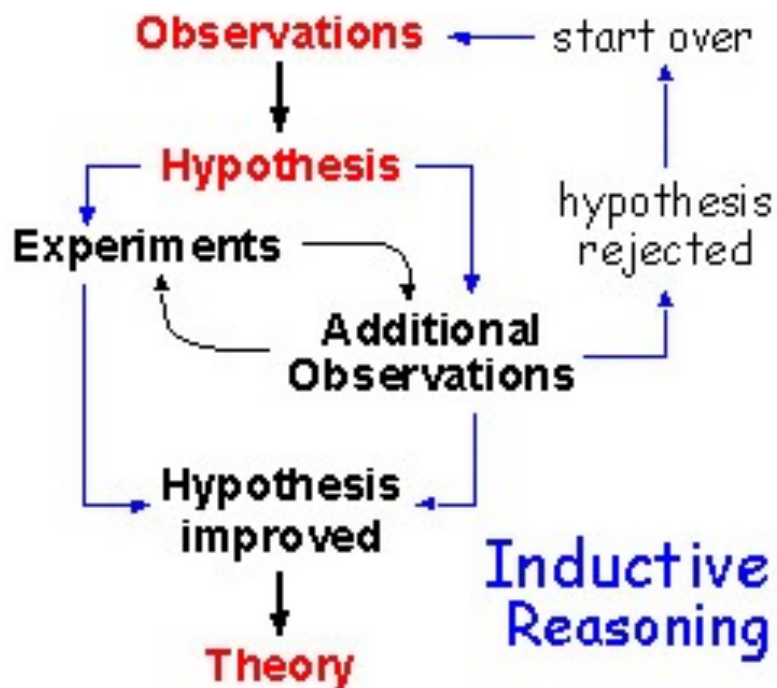
- 在哲学中，**推理 (inference)** 是“使用理智从某些前提产生结论的行动”
- 在逻辑中，**推理 (deduction)** 是通过一个或多个前提条件 (premises) 获得逻辑推论 (定论) 的过程
- 主要推理方式包括**归纳**、**演绎**和**溯因**三种



# 归纳推理



- 通过（大量的）前提条件和结果来学习规则的推理方式称归纳推理（inductive reasoning），归纳推理用来决定规则，进而产生“结论(conclusion)”。经验科学常使用归纳推理



Observation

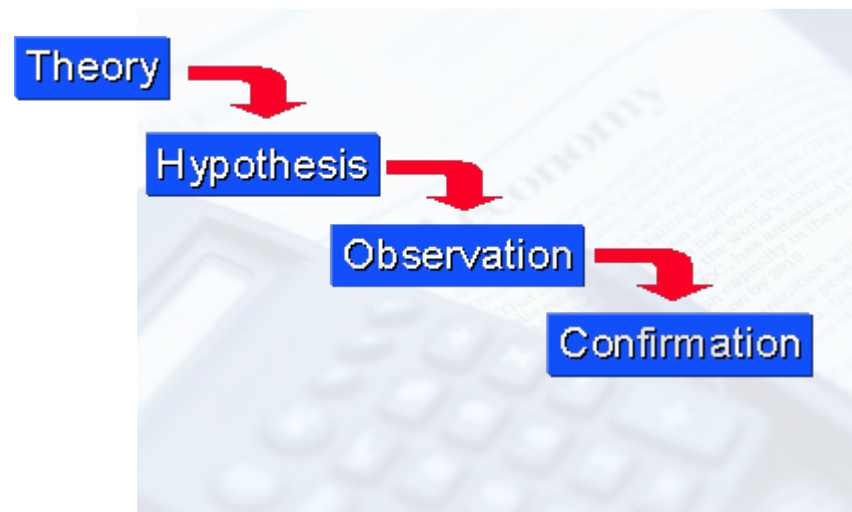
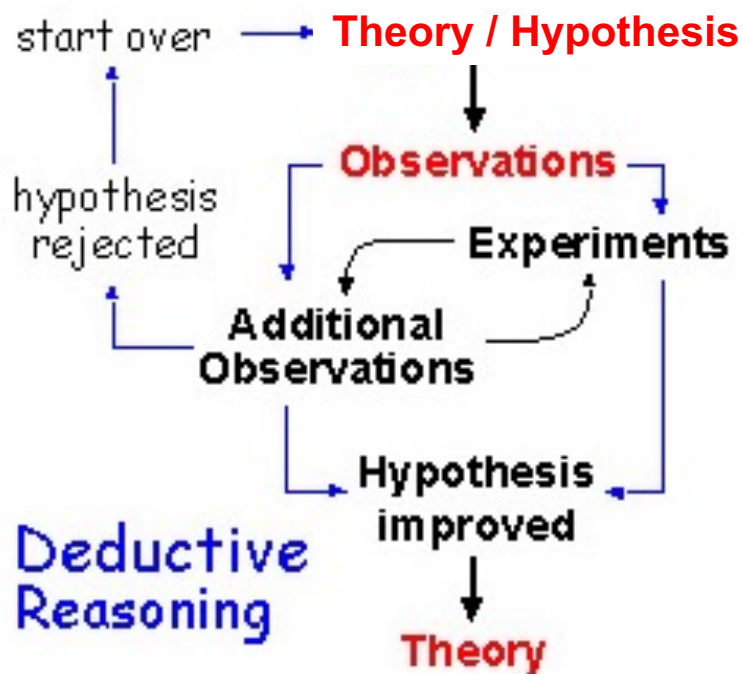




# 演绎推理



- 通过**规则**和**前提条件**推出**结论**的推理方式称演绎推理 (deductive reasoning)，演绎推理用来**决定结论**。数学相关的推理均用演绎推理





# 溯因推理（反绎推理）



- 通过**结论**和**规则**来支持**前提条件**从而**解释结论**的推理方式称溯因推理（abductive reasoning），它用来**决定前提**。诊断和侦查常使用溯因推理





# 命题逻辑的推理系统



- 命题逻辑的推理系统是19世纪70年代到20世纪初由G. Frege, G. Peano 和 B. Russell 共同建立的, 它是一种**演绎推理系统**
- 逻辑推理系统: 利用逻辑系统中已有的**公理**或给定的**判定及推理规则**经过有限推理过程产生新的**结论**的系统
- Intuitively, a good argument is one where the **conclusion follows from** (*i.e.* entails) the **premises** or assumptions. — David Hilbert



# 命题逻辑与命题演算



- 命题逻辑的逻辑推理过程事实上**等价于**命题公式的真假性证明或其等价变换（演算）的过程。因此命题逻辑（的推理过程）又称为“命题演算（propositional calculus）”
- 所有演绎推理系统都在**逻辑公理**和**推理规则**之间做出取舍和平衡（trade-off），这导致命题逻辑形式系统一般分为**公理推理系统**和**自然推理系统**两种风范（paradigm）。  
命题逻辑的推理系统亦如此



# 公理推理系统\*



- 公理推理系统是希尔伯特 (D. Hilbert) 主张的风范，其采用大量的逻辑公理和很少的推理规则，这种推理系统只能以给定的公理出发，应用系统中的推理规则进行推理，得到的结论必为重言式，结论称为系统中的定理 (theorem)
- 定义 (定理) :
  - (1) 每个公理都是定理；
  - (2) 若公式 $A$ 和公式 $A \rightarrow B$ 皆为定理，则 $B$ 是定理；
  - (3) 任何定理仅可通过有穷次应用 (1) 和/或 (2) 获得





# 公理推理系统的一个例子\*



## ■ 标准命题演算 (Standard PK) 中的公理 (Axioms) :

THEN-1:  $\phi \rightarrow (x \rightarrow \phi)$   
THEN-2:  $(\phi \rightarrow (x \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow x) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$   
AND-1:  $\phi \wedge x \rightarrow \phi$   
AND-2:  $\phi \wedge x \rightarrow x$   
AND-3:  $\phi \rightarrow (x \rightarrow (\phi \wedge x))$   
OR-1:  $\phi \rightarrow \phi \vee x$   
OR-2:  $x \rightarrow \phi \vee x$   
OR-3:  $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((x \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \vee x \rightarrow \psi))$   
NOT-1:  $(\phi \rightarrow x) \rightarrow ((\phi \rightarrow \neg x) \rightarrow \neg \phi)$   
NOT-2:  $\phi \rightarrow (\neg \phi \rightarrow x)$   
NOT-3:  $\phi \vee \neg \phi$

## ■ 推理规则 (Inference Rule) : MP<sup>†</sup> (分) : $\phi, \phi \rightarrow \chi \vdash \chi$



# 公理推理系统的一个例子\*



■ 例\*:  $A$  为命题, 证明定理:  $A \rightarrow A$  (即证明:  $\vdash A \rightarrow A$ ).

证明:

$$1. (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$$

公理 THEN-2 通过  $\varphi = A, \chi = A \rightarrow A, \psi = A$

$$2. A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$$

公理 THEN-1 通过  $\varphi = A, \chi = A \rightarrow A$

$$3. (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$$

得自 (1) 和 (2) 通过肯定前件。

$$4. A \rightarrow (A \rightarrow A)$$

公理 THEN-1 通过  $\varphi = A, \chi = A$

$$5. A \rightarrow A$$

得自 (3) 和 (4) 通过肯定前件.  $\square$

THEN-1:  $\phi \rightarrow (x \rightarrow \phi)$

THEN-2:  $(\phi \rightarrow (x \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow x) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$

AND-1:  $\phi \wedge x \rightarrow \phi$

AND-2:  $\phi \wedge x \rightarrow x$

AND-3:  $\phi \rightarrow (x \rightarrow (\phi \wedge x))$

OR-1:  $\phi \rightarrow \phi \vee x$

OR-2:  $x \rightarrow \phi \vee x$

OR-3:  $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((x \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \vee x \rightarrow \psi))$

NOT-1:  $(\phi \rightarrow x) \rightarrow ((\phi \rightarrow \neg x) \rightarrow \neg \phi)$

NOT-2:  $\phi \rightarrow (\neg \phi \rightarrow x)$

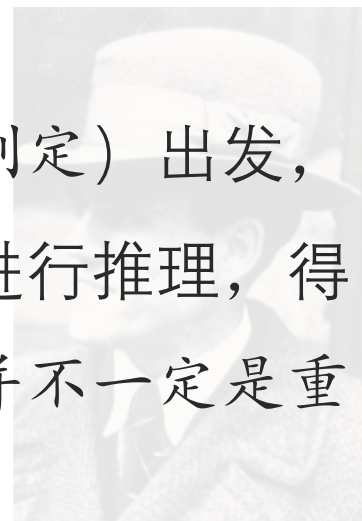
NOT-3:  $\phi \vee \neg \phi$



# 自然推理系统



- 自然推理系统NK由根岑（G. Gentzen）倡议建立：
  - “首先我希望构造尽可能紧密于实际推理的一种形式化主义。所以提议了‘自然演绎演算’。” ——Gentzen: *Untersuchungen über das logische Schließen*
- 自然推理系统风范的特点是系统由**很少的公理**（甚至无公理）和**大量的推理规则**构成
- 自然推理系统的推理由任意给定的**前提**（称为判定）出发，仿照人类的思维方式应用推理规则“自然地”进行推理，得到的命题公式称为**有效推论**（注意：有效推论并不一定是重言式，仅保证当前提为真时结论也为真）





# 自然推理系统的推理规则



附加

$$1. A \Rightarrow (A \vee B) \circ \circ \circ$$

前提  $\Rightarrow$  结论

化简

$$2. (A \wedge B) \Rightarrow A$$

假言推理

$$3. A \rightarrow B, A \Rightarrow B$$

取拒式

$$4. A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$$

析取三段论

$$5. A \vee B, \neg B \Rightarrow A$$

假言三段论

$$6. A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$$

消解

$$7. A \vee B, \neg A \vee C \Rightarrow B \vee C$$

合取引入

$$8. A, B \Rightarrow A \wedge B$$



# 推理规则的竖式形式



前提

结论

 $p$ 
 $p \rightarrow q$ 
 $\therefore q$ 

假言推理

 $\neg q$ 
 $p \rightarrow q$ 
 $\therefore \neg p$ 

取拒式

 $p \rightarrow q$ 
 $q \rightarrow r$ 
 $\therefore p \rightarrow r$ 

假言三段论

 $p \vee q$ 
 $\neg p$ 
 $\therefore q$ 

析取三段论

 $p$ 
 $\therefore p \vee q$ 

附加

 $p \wedge q$ 
 $\therefore p$ 

化简

 $p$ 
 $q$ 
 $\therefore p \wedge q$ 

合取引入

 $p \vee q$ 
 $\neg p \vee r$ 
 $\therefore q \vee r$ 

消解



# 推理规则对应的永真式



TABLE 1 Rules of Inference.

Rule of Inference	Tautology	Name
$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	Modus ponens
$\frac{\neg q \quad p \rightarrow q}{\therefore \neg p}$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	Modus tollens
$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	Hypothetical syllogism
$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	Disjunctive syllogism
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	Addition
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Simplification
$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Conjunction
$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{\therefore q \vee r}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	Resolution

例:

- 前提: Marcus是一位诗人。
- 前提: 如果Marcus是一位诗人, 那么他一定很穷。
- 设定命题变元  $P$ : “Marcus是一位诗人。”  
 $Q$ : “Marcus很穷。”

➤ 推理规则: *Modus Ponens* (MP)

$P$  (前提)

$P \rightarrow Q$  (前提)

$\therefore Q$  (结论)

➤ 推理规则MP对应的永真式的真值表:

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

- 结论: “Marcus很穷。” ( $Q$  真当前提皆真)



# 自然推理的例子





# 自然推理的例子 (续)



■ **例：**  $A$  为命题，证明  $\vdash A \rightarrow A$ .

■ **证明：**

- (1)  $A$  (前提)
- (2)  $A \vee A$  (附加 自(1))
- (3)  $(A \vee A) \wedge A$  (合取引入 自(1)(2))
- (4)  $A$  (化简 自(3))
- (5)  $A \vdash A$  (总结 自(1)~(4))
- (6)\*  $\vdash A \rightarrow A$  (自(5)) .  $\square$

**证明：**

1.  $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$

公理 THEN-2 通过  $\varphi = A$ ,  $\chi = A \rightarrow A$ ,  $\psi = A$

2.  $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$

公理 THEN-1 通过  $\varphi = A$ ,  $\chi = A \rightarrow A$

3.  $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$

得自 (1) 和 (2) 通过肯定前件。

4.  $A \rightarrow (A \rightarrow A)$

公理 THEN-1 通过  $\varphi = A$ ,  $\chi = A$

5.  $A \rightarrow A$

得自 (3) 和 (4) 通过肯定前件.  $\square$



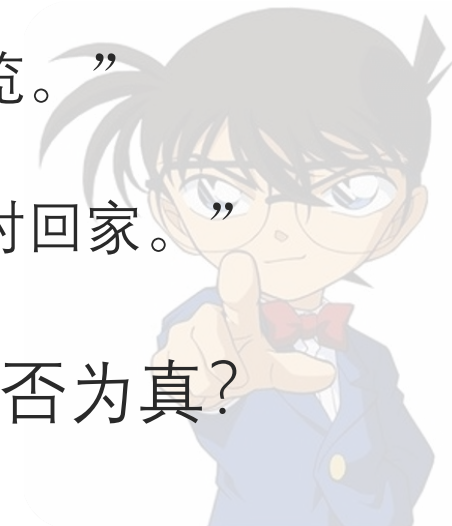
# 用命题逻辑进行推理



## ■ 例：

- “今天下午没有出太阳并且比昨天冷。”
- “只有今天下午出太阳，我们才会去游泳。”
- “若我们不去游泳，则我们将乘独木舟游览。”
- “若我们乘独木舟游览，则我们将在黄昏时回家。”

■ 试问结论“我们将在黄昏时回家。”是否为真？





# 用命题逻辑进行推理 (续)



- 建立命题变元  $p$ : 今天下午出太阳。  $q$ : 今天比昨天冷。  $r$ : 我们会去游泳。  $s$ : 我们会乘独木舟游览。  $t$ : 我们会在黄昏时回家。
  - “今天下午没有出太阳并且比昨天冷。”  $\Rightarrow \neg p \wedge q$
  - “只有今天下午出太阳，我们才会去游泳。”  $\Rightarrow r \rightarrow p$
  - “若我们不去游泳，则我们会乘独木舟游览。”  $\Rightarrow \neg r \rightarrow s$
  - “若我们乘独木舟游览，则我们会在黄昏时回家。”  $\Rightarrow s \rightarrow t$



# 用命题逻辑进行推理 (续)



- “今天下午没有出太阳并且比昨天冷。”  $\Rightarrow \neg p \wedge q$
- “只有今天下午出太阳，我们才会去游泳。”  $\Rightarrow r \rightarrow p$
- “若我们不去游泳，则我们会乘独木舟游览。”  $\Rightarrow \neg r \rightarrow s$
- “若我们乘独木舟游览，则我们会在黄昏时回家。”  $\Rightarrow s \rightarrow t$

$$\begin{aligned}
 \neg p \wedge q &\Rightarrow \neg p && \text{(化简)} \\
 \neg p, r \rightarrow p &\Rightarrow \neg r && \text{(取拒式)} \\
 \neg r, \neg r \rightarrow s &\Rightarrow s && \text{(假言推理)} \\
 s, s \rightarrow t &\Rightarrow t && \text{(假言推理)}
 \end{aligned}$$

$p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \vee q$
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$\neg p$
$\therefore q$	$\therefore \neg p$	$\therefore p \rightarrow r$	$\therefore q$
假言推理	取拒式	假言三段论	析取三段论
$p$	$p \wedge q$	$p$	$p \vee q$
$\therefore p \vee q$	$\therefore p$	$\therefore p \wedge q$	$\neg p \vee r$
附加	化简	合取引入	消解



# 命题逻辑系统的完备性\*



- 定理 ( $PK$ 的完备性) : 命题演算系统 $PK$ 是完备的 (completeness) , 即 $PK$ 中所有逻辑有效的公式均可在 $PK$ 中证明 (*i.e.* 对任意命题 $P, Q$ , 若 $P \models Q$ , 则 $P \vdash Q$ 。其中 $\models$ 表示语义蕴含,  $\vdash$ 表示语法蕴含)

- 证明略



# 命题逻辑系统的可靠性\*



- 定理 ( $PK$ 的可靠性) : 命题演算系统 $PK$ 是可靠的 (soundness) , 即所有可在 $PK$ 中证明的公式均在 $PK$ 中逻辑有效 (*i.e.* 对任意命题 $P, Q$ , 若 $P \vdash Q$ , 则 $P \models Q$ 。其中 $\vdash$ 表示语法蕴含,  $\models$ 表示语义蕴含)

- 证明略



# 本次课后作业



- 教材内容: [Rosen] 1.6 节 (部分)
- 课后习题:
  - Problem Set 2
- 提交时间: 3月4日 10:00 前