



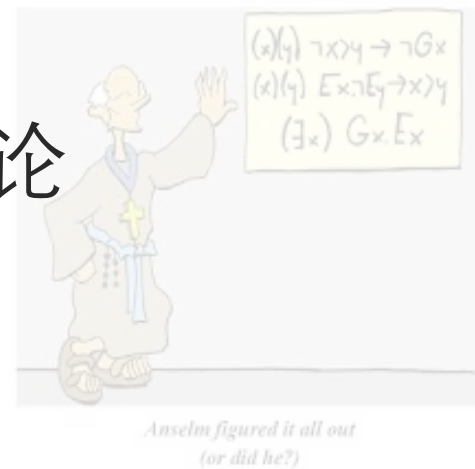
离散数学

Discrete Mathematics

第三讲：谓词逻辑引论

吴楠

南京大学计算机学院



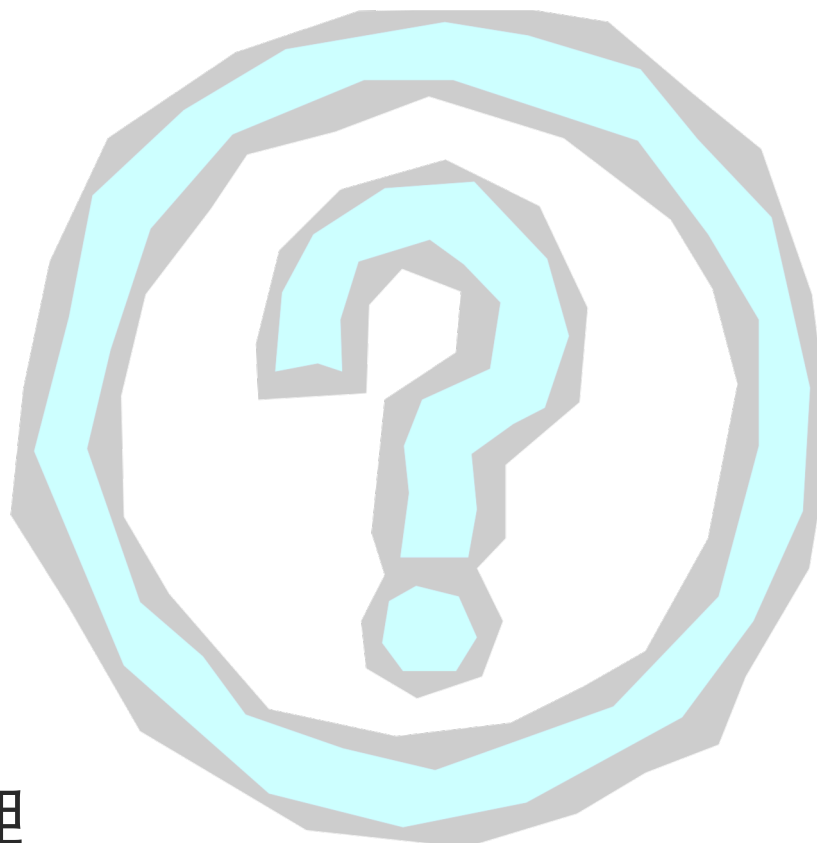
2025 年 2 月 25 日



前情提要



- 逻辑推理
- 命题演算的推理
- 公理推理系统*
- 自然推理系统
- 用命题逻辑进行推理

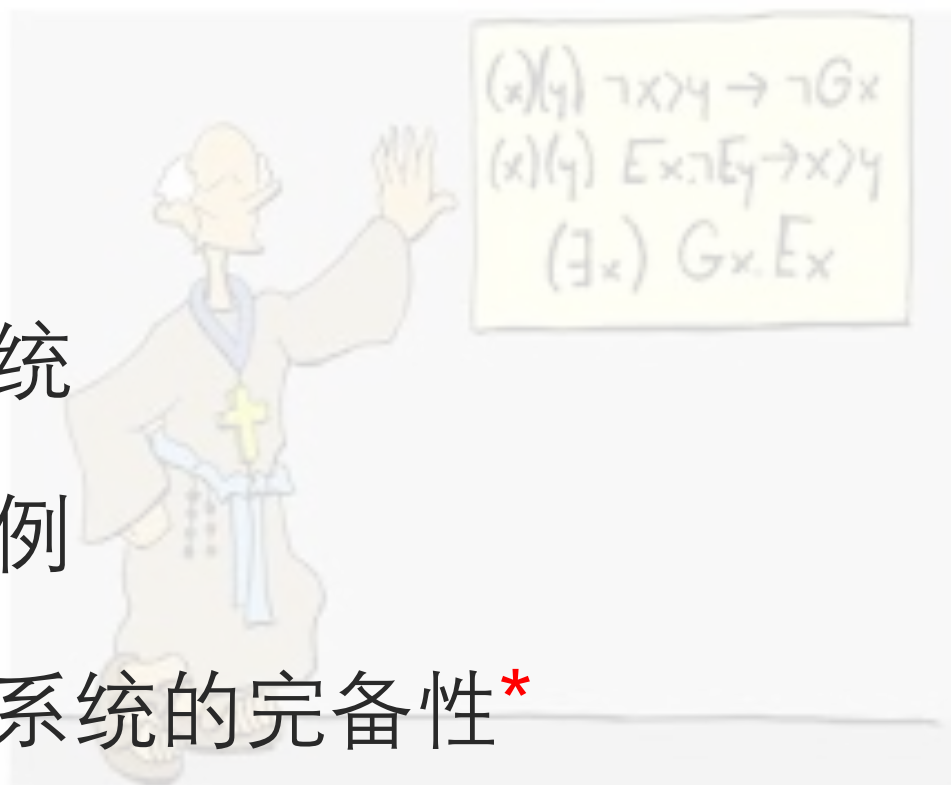




本讲主要内容



- 谓词与量词
- 谓词逻辑
- 谓词逻辑的推理系统
- 谓词逻辑的推理实例
- 一阶谓词逻辑推理系统的完备性*
- 谓词逻辑的应用举例*



*Anselm figured it all out
(or did he?)*



为什么引入谓词逻辑？



- 命题逻辑中的命题是以整个语句为最小单位的，这种“主宾式”的原子逻辑结构限制了逻辑系统的表达能力，故此有些句子无法用命题精确表达：
 - 含有变量的语句：如 “ $3 + x = 5$ ”，“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”
 - 含有数量限定性定语的句子：如 “所有学生今天都来上课了。”，“有的西瓜是黄瓢的。”



谓词逻辑



- 对于含有变量的语句，引入描述属性的逻辑形式——谓词 (predicate)。谓词引入之后，便可以变量作为参数，命题作为其值来进行描述
- 定义（谓词）：函数 P 为呈型 $P(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ 的陈述句，且 P 在 (x_1, x_2, \dots, x_n) 处为一具体命题，称函数 P 为谓词，也称命题函项；其中 x_1, x_2, \dots, x_n 称为个体 (individual)
- 谓词描述了个体所具有的性质，或给出了个体之间的关系
- 例：谓词 $P(a, b, c)$ 指 $a^2 + b^2 = c^2$ ，则 $P(3, 4, 5)$ （注意：谓词 P 此时已特化为一个命题）的值为真，而 $P(4, 5, 6)$ 的值为假



谓词逻辑（续）



- 对于含有数量限定性定语的语句，引入量词（quantifier）来量化谓词在一定范围（称为论域）的事物上成立的程度
- **定义（量词）**：
 - (1)**全称量词**：“ $P(x)$ 的全称化”记为 $\forall xP(x)$ ，指命题“对所有论域中的 x ， $P(x)$ 为真。”
 - (2)**存在量词**：“ $P(x)$ 的存在化”记为 $\exists xP(x)$ ，指命题“存在论域中的某个 x ，使 $P(x)$ 为真。”
- **例**：“对任何数，总有一数比它大。”可表示为：

$$\forall x \exists y (y > x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Diagram illustrating the components of the logical expression $\forall x \exists y (y > x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$:

- \forall (Universal Quantifier) is labeled 量词 (Quantifier).
- x (Individual Variable) is labeled 个体 (Individual).
- y (Individual Variable) is labeled 个体 (Individual).
- $>$ (Predicate) is labeled 谓词 (Predicate).
- $(x, y \in \mathbb{R})$ (Domain) is labeled 论域 (Domain).



含量词公式的否定式



- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

- 例：对所有的 x ， x 的平方是正数

- 否定：存在某个实数 x ，其平方不是正数

- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

- 例：存在 x ，满足 $5x = x$

- 否定：对所有的 x ， $5x \neq x$



将自然语言翻译为谓词逻辑表达式



- **例1:** “这个班上的每个学生都学过微积分课程。”
 - $S(x)$: x 是这个班上的学生。
 - $C(x)$: x 学过微积分课程。
 - $\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$
- **例2:** “这个班上的每个学生都或者去过加拿大，或者去过墨西哥。”
 - $S(x)$: x 是这个班上的学生。
 - $V(x, y)$: x 去过 y 地方。
 - $\forall x(S(x) \rightarrow V(x, \text{加拿大}) \vee V(x, \text{墨西哥}))$



将自然语言翻译为谓词逻辑表达式(续)



- 给定以下谓词，请尝试使用谓词和量词翻译如下
Чебышёв 定理：“在正整数 n 与 $2n$ 之间必存在素数。” ($N(x)$: x 是正整数; $y|x$: y 可整除 x)
- 定理的一种谓词逻辑语句表示 (论域为整数集) :

$$\forall n \left(N(n) \rightarrow \exists x \left(N(x) \wedge (x \geq n) \wedge (x \leq 2n) \wedge \forall y (y|x \rightarrow (y = 1 \vee y = x)) \right) \right)$$



含量词的推理规则



- 含量词的自然推理系统需增加以下4条推理规则：
 - 全称例示 (**UI**) : $\forall xP(x) \Rightarrow P(c)$
 - 全称生成 (**UG**) : 对任意 c , $P(c) \Rightarrow \forall xP(x)$
 - 存在例示 (**EI**) : $\exists xP(x) \Rightarrow$ 对某个 c , $P(c)$
 - 存在生成 (**EG**) : 对某个 c , $P(c) \Rightarrow \exists xP(x)$



谓词逻辑的公理系统*



- 谓词逻辑的公理系统在命题逻辑公理系统中增加以下4条**量化公理**:

- **PRED-1:** $\forall xZ(x) \rightarrow Z(t)$
- **PRED-2:** $Z(t) \rightarrow \exists xZ(x)$
- **PRED-3:** $\forall x(W \rightarrow Z(x)) \rightarrow (W \rightarrow \forall xZ(x))$
- **PRED-4:** $\forall x(Z(x) \rightarrow W) \rightarrow (\exists xZ(x) \rightarrow W)$

(注: 在不同的公理推理系统中量化公理可能有不同的表示)



谓词逻辑推理实例



■ 一个例子（由 Lewis Carroll 提供）：

○ “All lions fierce.”

..... ①

○ “Some lions do not drink coffee.”

..... ②

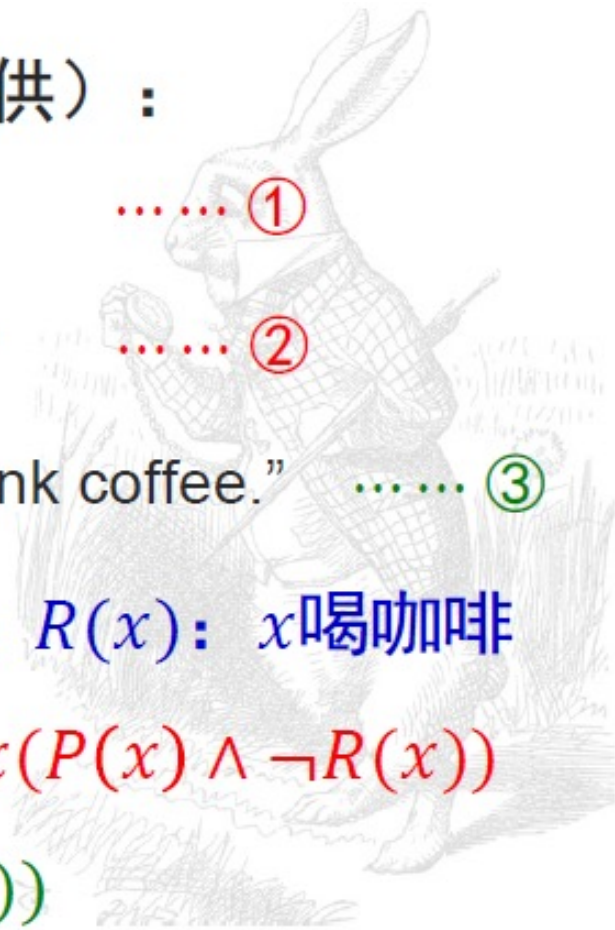
○ “Some fierce creatures do not drink coffee.”

..... ③

■ $P(x)$: x 是狮子; $Q(x)$: x 凶猛; $R(x)$: x 喝咖啡

①: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$; ②: $\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$

$\{①, ②\} \Rightarrow ③: \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$





谓词逻辑推理实例 (续)



■ 证明过程:

在论域（全体生物）中设置谓词： $P(x)$: x 是狮子； $Q(x)$: x 凶猛； $R(x)$: x 喝咖啡；如果令个体 a 为某一只狮子. 在上述谓词设置下前提可表为：前提1: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ ，前提2: $\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$ ；前提3: $P(a)$. 待证明的结论可表为：结论: $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$.

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------|--------------------------------------|-----------------|
| ① $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ | (前提1) | ⑤ $\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$ | (前提2) |
| ② $P(a) \rightarrow Q(a)$ | (UI from ①) | ⑥ $P(a) \wedge \neg R(a)$ | (EI from ⑤) |
| ③ $P(a)$ | (前提3) | ⑦ $\neg R(a)$ | (Simp from ⑥) |
| ④ $Q(a)$ | (MP from ②③) | ⑧ $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | (CI from ④⑦) |
| | | ⑨ $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | (EG from ⑧, 结论) |

即证明了结论是正确的. \square



谓词逻辑推理实例（续）



“在这个班上的某个学生没有读过这本书”，“班上的每个人都通过了第一门考试”，结论“通过第一门考试的某个人没有读过这本书”。

$C(x)$: x 在这个班上

$B(x)$: x 读过书了

$P(x)$: x 通过了第一门考试

- $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
- $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

证明框架：

对于论域（某学校的全体学生）中的某个体 a ：

$C(a) \wedge \neg B(a)$... 存在例示 (EI)
$C(a)$... 化简 (Simp)
$C(a) \rightarrow P(a)$... 全称例示 (UI)
$P(a)$... 假言推理 (MP)
$\neg B(a)$... 化简 (Simp)
$P(a) \wedge \neg B(a)$... 合取引入 (CI)
$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$... 存在生成 (EG)



一阶谓词逻辑推理系统的性质*



- 定理 (**Gödel完备性定理**, *K. Gödel 1929*) : 一阶谓词逻辑推理系统 FOL 是完备的 (completeness) , 即 FOL 中所有逻辑有效的公式均可在 FOL 中证明
- 定理 (**FOL 的可靠性**, *J. Herbrand 1930*) : 一阶谓词逻辑推理系统 FOL 是可靠的 (soundness) , 即所有在 FOL 中可证的公式均在 FOL 中逻辑有效
- 定理 (**FOL 的不可判定性**, *A. Church & A. Turing 1936 – 1937*) : 一阶谓词逻辑系统是不可判定的 (undecidable / semi-decidable)
- 证明均略



逻辑的应用*：程序的逻辑验证



- 现代计算机程序规模巨大而且复杂，一些安全攸关（safe-critical）的代码一旦出错，将产生灾难后果，而这些代码仅凭测试很难证明其无错
 - 加拿大Therac-25辐射治疗机导致三死三重伤（1985）
 - 美国AT&T 电话网络大瘫痪（1990-01-15）
 - 法国Ariane-5运载火箭发射失败（1996-06-04）
 - NASA “火星极地登陆者” 探测器失踪（1999-12-03）
 - NASA “火星环球勘探者” 探测器失踪（2007-11-02）



程序的逻辑验证* (续)



```
view plain  copy to clipboard  print  ?

01.  network code()
02.  {
03.  switch (line) {
04.      case THING1:
05.          doit1();
06.          break;
07.      case THING2:
08.          if (x == STUFF) {
09.              do_first_stuff();
10.              if (y == OTHER_STUFF)
11.                  break;
12.              do_later_stuff();
13.          } /* coder meant to break to here... */
14.          initialize_modes_pointer();
15.          break;
16.      default:
17.          processing();
18.  } /* ...but actually broke to here! */
19.  use_modes_pointer(); /* leaving the modes_pointer
20.      uninitialized */
21.  }
```



程序的逻辑验证* (续)



```
...
declare
  vertical_veloc_sensor: float;
  horizontal_veloc_sensor: float;
  vertical_veloc_bias: integer;
  horizontal_veloc_bias: integer;
...
begin
  declare
    pragma suppress(numeric_error, horizontal_veloc_bias);
  begin
    sensor_get(vertical_veloc_sensor);
    sensor_get(horizontal_veloc_sensor);
    vertical_veloc_bias := integer(vertical_veloc_sensor);
    horizontal_veloc_bias := integer(horizontal_veloc_sensor);
    ...
  exception
    when numeric_error => calculate_vertical_veloc();
    when others => use_irs1();
  end;
end irs2;
```

declare

```
...
horizontal_veloc_sensor: float;
...
horizontal_veloc_bias: integer;
...
```

begin

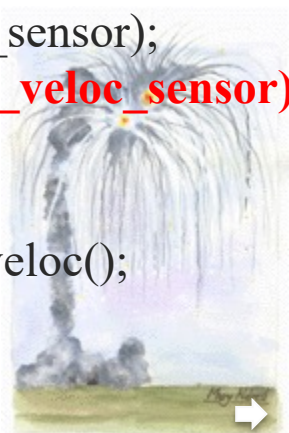
```
sensor_get(vertical_veloc_sensor);
sensor_get(horizontal_veloc_sensor);
vertical_veloc_bias := integer(vertical_veloc_sensor);
horizontal_veloc_bias := integer(horizontal_veloc_sensor)
```

```
...
```

exception

```
  when numeric_error => calculate_vertical_veloc();
  when others => use_irs1();
```

end;





程序的逻辑验证* (续)



- 现代一般用逻辑的方法进行程序正确性证明或形式化验证。已经通过程序正确性证明的例子：
 - 中国火车控制系统（CTCS-2）核心（约1.4万行C代码）
 - 美军F-16战斗机控制系统核心（约2.8万行Ada代码）
 - 美国奋进号航天飞机主控系统核心（约4万行Ada代码）
 - 通用汽车发动机管理系统（EMS）（约8000行C代码）



本次课后作业



- 教材内容: [Rosen] 1.4–1.6节 (1.5节请自学)
- 课后习题:
 - Problem Set 3
 - 注: 符号 $\exists!$ 表示量词存在唯一的
- 提交时间: 3月4日 10:00 前