



# 离散数学

## Discrete Mathematics

### 第七讲：函数

吴楠

南京大学计算机学院



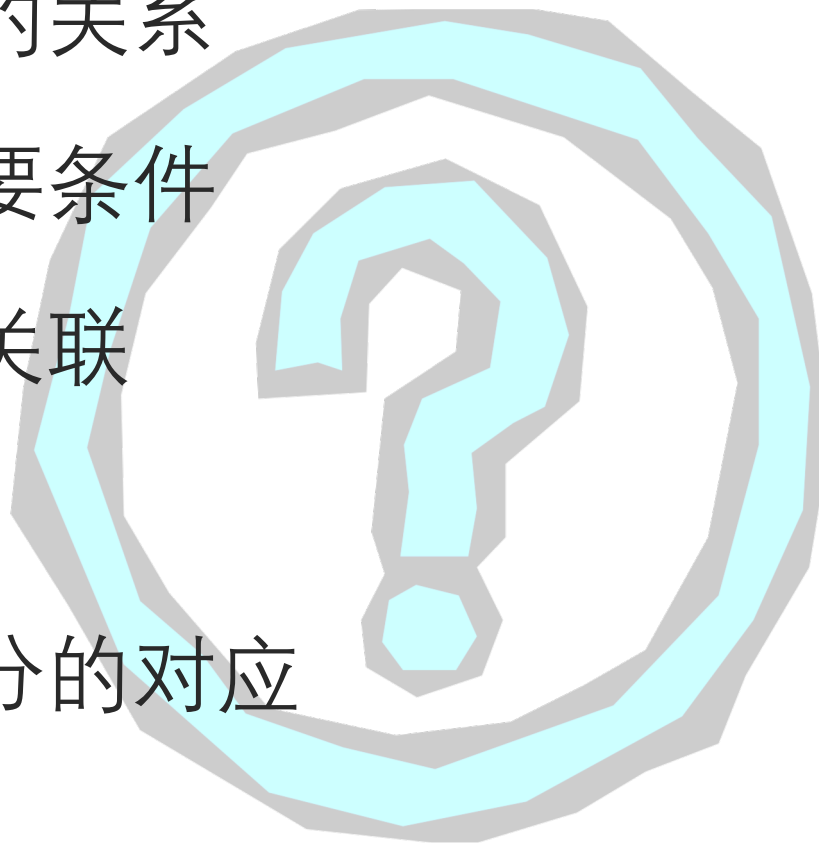
2025 年 3 月 14 日



# 前情提要



- 几类具有特殊性质的关系
- 性质满足的充分必要条件
- 性质与运算之间的关联
- 等价关系
- 等价关系与集合划分的对应
- 关系的闭包





# 本讲主要内容



- 函数的定义
- 函数的性质
  - 满射、单射、双射
- 函数的复合
- 反函数

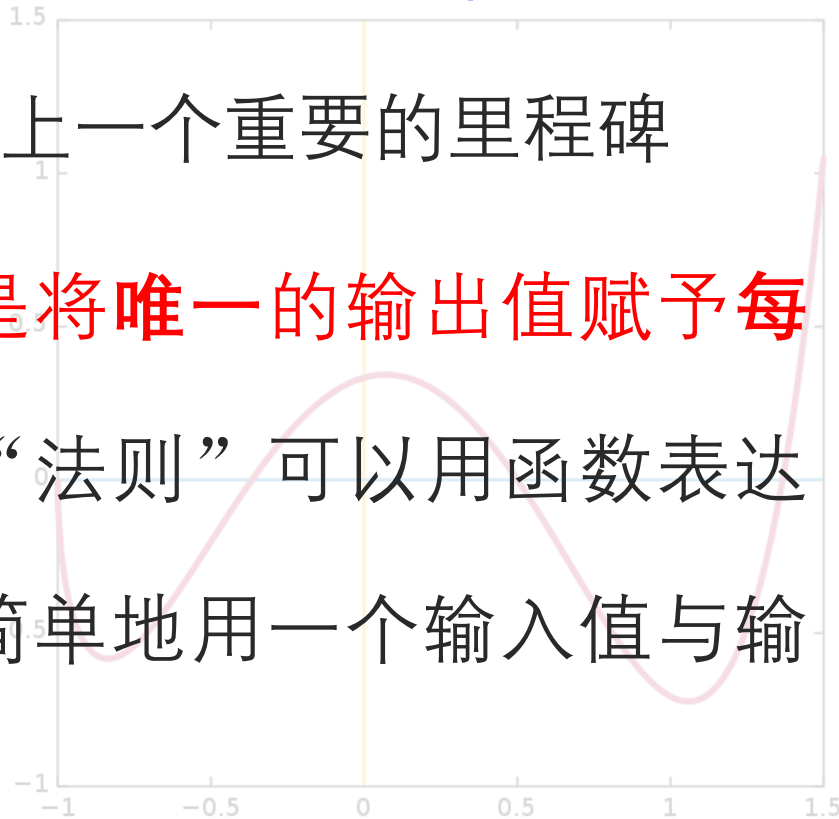




# 函数：科学的里程碑



- **函数 (function)** 是人类抽象思维的一个重要对象，函数的提出是科学发展史上一个重要的里程碑
- 从哲学意义上看，**函数是将唯一的输出值赋予每一输入的“法则”**，该“法则”可以用函数表达式、数学关系，或者可简单地用一个输入值与输出值的对应表来表示



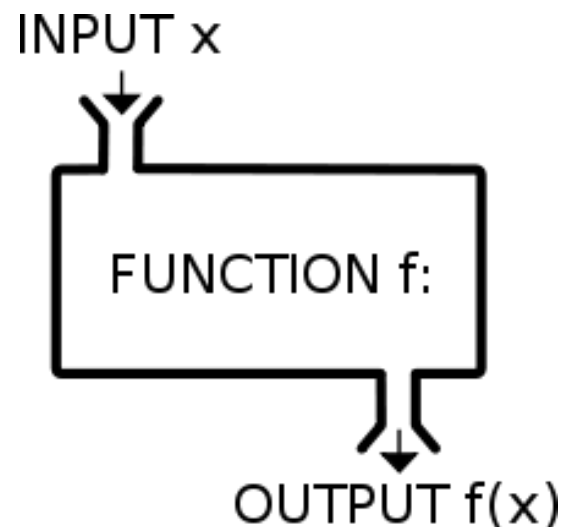


# 函数：科学的里程碑（续）



- 函数最重要的性质是其**决定性**，即**同一输入总是对应同一输出**（注意，反之未必成立）。从这种视角，可以将函数看作“机器”或者“黑盒”：

它将有效的输入值变换为唯一的输出值。通常将输入值称作函数的**参数 (argument)**，将输出值称作函数的**值 (value)**

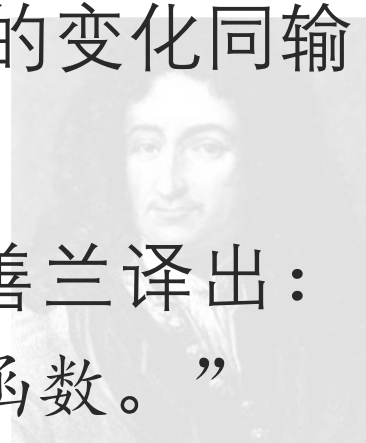




# 函数：科学的里程碑（续）



- “**function** 【拉丁：*functiō*】”这个数学名词是G. Leibniz在1694年开始使用的，其所指的函数现在被称作“可导函数”，数学家之外的普通人一般接触到的函数即属此类。对于可导函数可以讨论它的极限和导数。此两者描述了函数输出值的变化同输入值变化的关系，是微积分学的基础
- 中文的“**函数**”一词由清代数学家李善兰译出：“凡式中函（含）‘天’，为‘天’之函数。”



——（清）李善兰《代数学》



# 函数定义的演化



- 1718年, J. Bernoulli: “一个变量的函数是指由这个变量和常量以任何一种方式**组成**的一种**量**。”
- 1748年, L. Euler: “一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式**构成**的**解析式**。”



# 函数定义的演化（续）



- 1775年，L. Euler 《微分学原理》：“如果某些量以如下方式**依赖**于另一些量，即当后者变化时，前者本身也发生变化，则称前一些量是后一些量的函数。”
- 受公理化运动的推动，19世纪后半叶的数学家开始对数学的各个分支作规范整理。K. Weierstrass 提出将微积分学建立在算术——而非几何——的基础上，函数的定义因此更趋向于欧拉的定义



# 函数定义的历史（续）



- 到19世纪末，数学家开始尝试用集合论来规范数学，试图将每一类数学对象定义为一个集合。本时期 J. Dirichlet 给出了现代形式的函数定义。
- Dirichlet 将函数视作关系的特例。然而对于实际应用的情况，现代定义和Euler定义的区别可以忽略不计



# 函数的集合定义

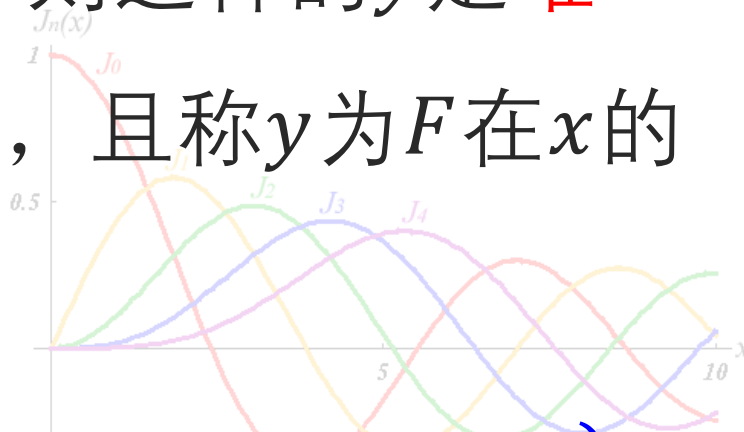


- 设 $F$ 为二元关系， $F$ 为函数指：

$$(\forall x, y, z)(xFy \wedge xFz \rightarrow y = z)$$

当 $F$ 为函数，若有 $y$ 使 $xFy$ ，则这样的 $y$ 是唯一的，这时记这样的 $y$ 为 $F(x)$ ，且称 $y$ 为 $F$ 在 $x$ 的值。事实上：

$$F \text{ 为函数} \leftrightarrow (\forall x \in \text{Dom}(F) \rightarrow (\exists! y)(xFy))$$





# 函数的集合定义 (续)

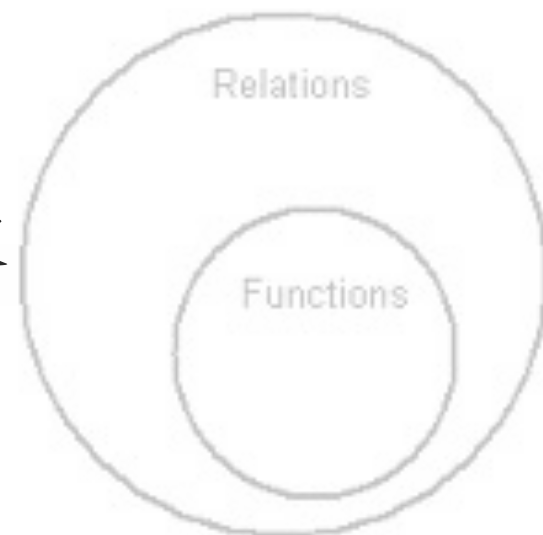


■ 例:

$F_1 = \{(1,2), (3,2)\}$  为函数

$F_2 = \{(1,2), (1,3)\}$  不为函数

$F_3 = \emptyset$  为函数





# 函数的外延原则



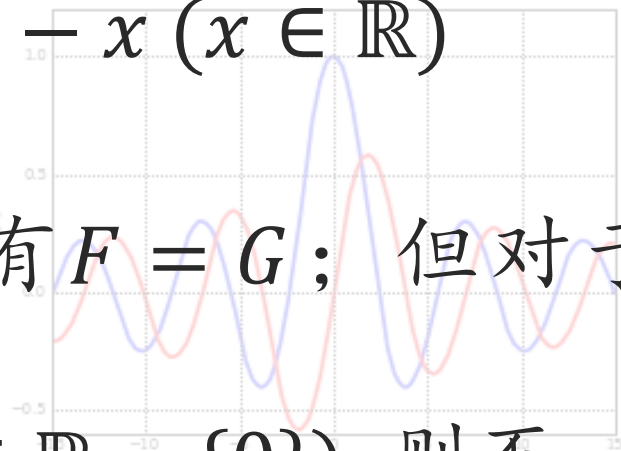
- 函数的外延原则：设 $F$ ， $G$ 为函数，则：

$$F = G \leftrightarrow [\text{Dom}(F) = \text{Dom}(G) \wedge (\forall x \in \text{Dom}(F))(F(x) = G(x))]$$

- 例：  $F = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $G = x - x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

则根据函数的外延原则，有 $F = G$ ；但对于

$F = 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $G = x/x$  ( $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ) 则否

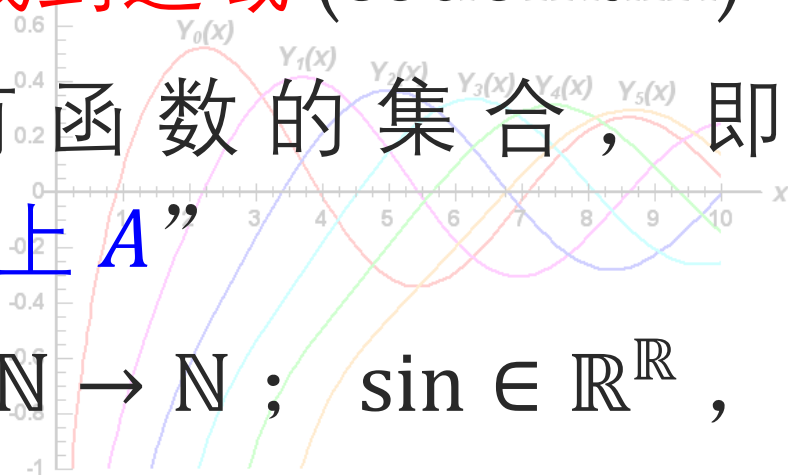




# 函数的集合



- **定义**：设 $A, B$ 为集合， $F$ 为从 $A$ 到 $B$ 的函数（记为 $F: A \rightarrow B$ ）指 $F$ 为函数，且  $\text{Dom}(F) = A$ ， $\text{Ran}(F) \subseteq B$ ； $A$ 称函数 $F$ 的**定义域**， $\text{Ran}(F)$ 称 $F$ 的**值域**， $B$ 称 $F$ 的**陪域或到达域** (codomain)
- 记  $B^A$  为  $A$  到  $B$  的所有函数的集合，即  $\{F | F: A \rightarrow B\}$ ，读作“ **$B$  上  $A$** ”
- **例**：  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，  $\text{Suc}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ；  $\sin \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ，  
 $\text{Suc} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$





# 函数的集合 (续)



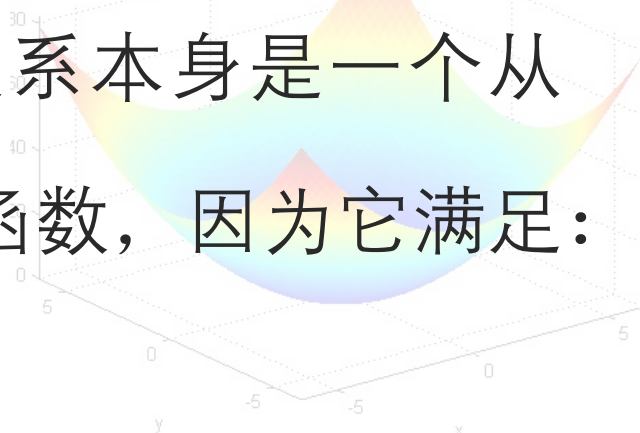
■ 命题：设  $|A| = m$ ,  $|B| = n$ , 则：

$$|B^A| = |B|^{|A|} = n^m$$

这里约定  $0^0 = 1$ 。注意：当  $|A| = 0$ ,  $|B| = 0$ , 即：

$A = B = \emptyset$  时,  $B^A = \{\emptyset\}$ ; 空关系本身是一个从空集到任意集合  $S$  (包括空集) 的函数, 因为它满足:

$$\forall x \in \emptyset \rightarrow (\exists! y \in S)((x, y) \in \emptyset)$$





# 像与原像



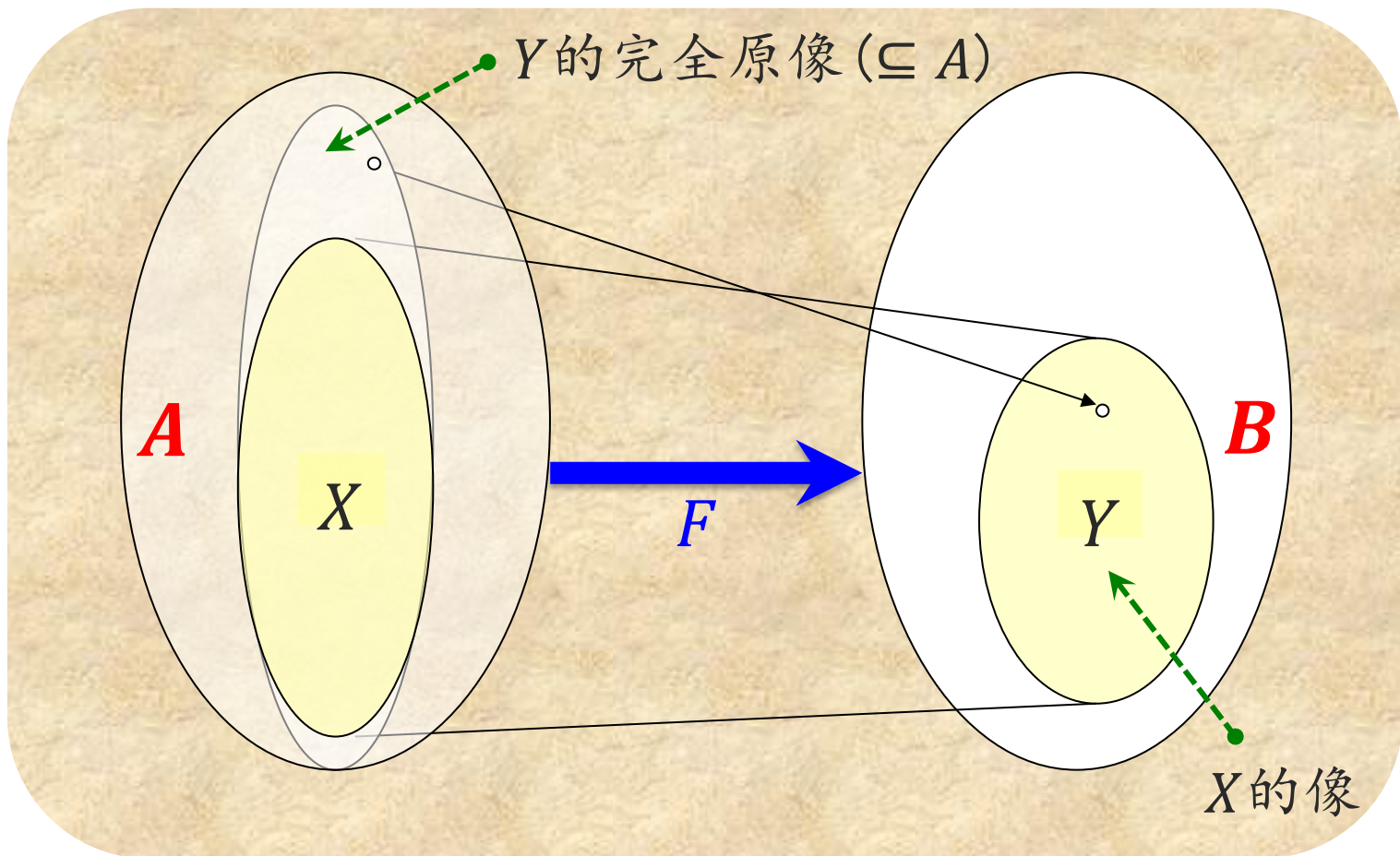
- 函数的**值**是对域中一个**元素**而言，而函数的**像**和**原像**是对域中一个**子集**而言

- 定义：** 设  $F: A \rightarrow B, X \subseteq A, Y \subseteq B$ ，称  $F[X] = \{F(x) | x \in X\}$  为  $X$  在  $F$  下的**像** (image)；称  $F^{-1}[Y] = \{x \in A | F(x) \in Y\}$  为  $Y$  的 (完全)**原像** (inverse image)





# 像与原像 (续)





# 像与原像 (续)



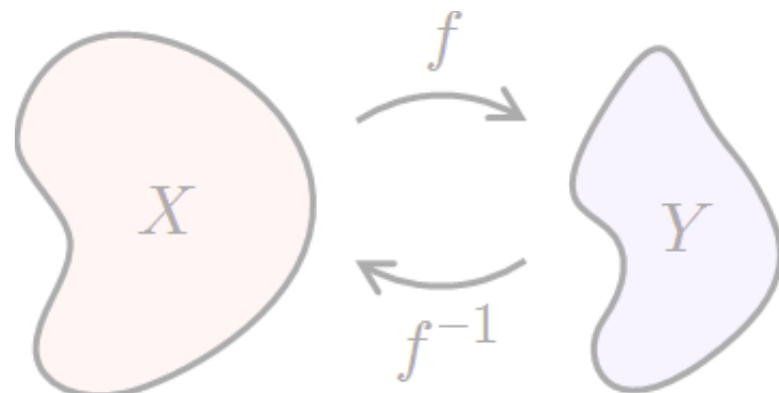
■ 例:  $\text{Suc}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{Suc}[\{1,2\}] = \{2,3\}$$

$$\text{Suc}[\mathbb{N}] = \mathbb{N}^+$$

$$\text{Suc}^{-1}[\{0,2,3\}] = \{1,2\}$$

$$\text{Suc}[\text{Suc}^{-1}[\{0,2,3\}]] \neq \{0,2,3\}$$





# 满射、单射与双射



■ 定义：设  $f: A \rightarrow B$

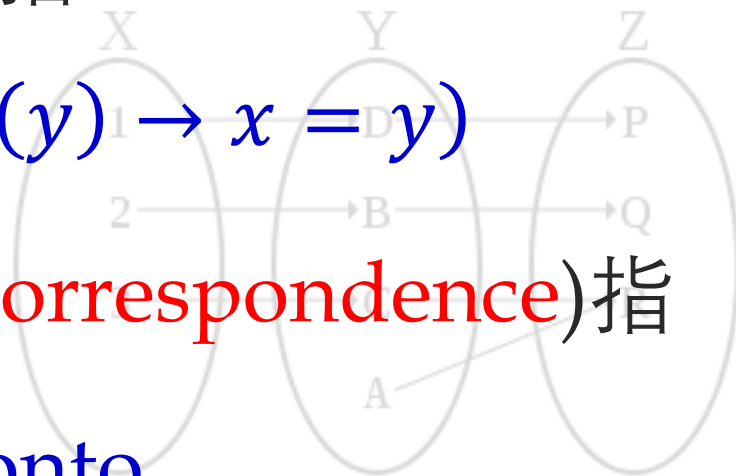
(1)  $f$  为 **满射** (surjection / **onto**) 指  $\text{Ran}(f) = B$

(2)  $f$  为 **单射** (injection / **1-1**) 指

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

(3)  $f$  为 **双射** (bijection / **1-1 correspondence**) 指

$f$  为 1-1 且 onto





# 满射、单射与双射 (续)

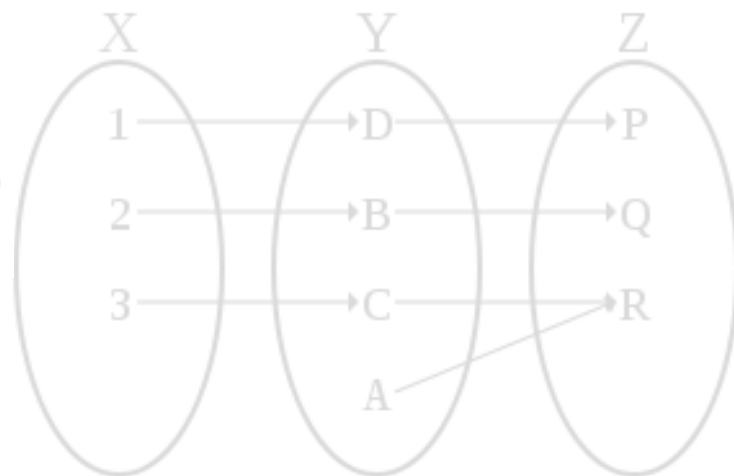


## ■ 记号\*:

$f$  为 onto:  $f : A \twoheadrightarrow B$

$f$  为 1-1:  $f : A \hookrightarrow B$

$f$  为一一对应:  $f : A \xrightarrow{\sim} B$





# 满射、单射与双射 (续)



## ■ 例:

(1)  $\text{Suc}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  是单射但非满射

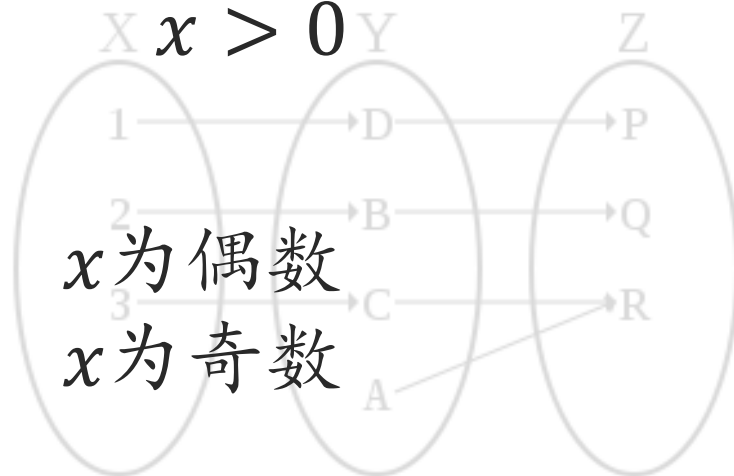
(2)  $\text{Pred}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  是满射但非单射, 其定义为:

$$\text{Pred}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

(3) 令  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \text{ 为偶数} \\ x - 1 & x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

则  $f$  是双射





# 函数的复合



■ **定理（函数的复合）**：设 $F$ 和 $G$ 是函数，则

$F \circ G$ 也是函数，且满足：

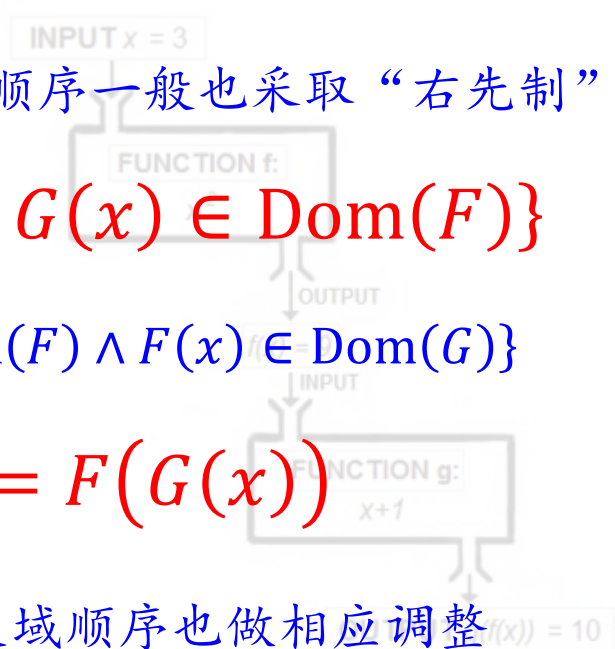
■ 注：仿照关系复合的定义，函数复合的运算顺序一般也采取“右先制”

(1)  $\text{Dom}(F \circ G) = \{x | x \in \text{Dom}(G) \wedge G(x) \in \text{Dom}(F)\}$

■ 注：有文献定义为 $\text{Dom}(F \circ G) = \{x | x \in \text{Dom}(F) \wedge F(x) \in \text{Dom}(G)\}$

(2)  $\forall x \in \text{Dom}(F \circ G)$ ，有  $F \circ G(x) = F(G(x))$

■ 注：有文献定义为 $F \circ G(x) = G(F(x))$ ，定义域顺序也做相应调整





# 函数的复合 (续)



■ 推论 (复合的结合性) : 设 $F, G, H$ 是函数,

则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 也是函数, 且:

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

由函数复合定理和关系的结合性易证





# 函数的复合 (续)



■ **定理** (复合对函数关联性的保持) : 设

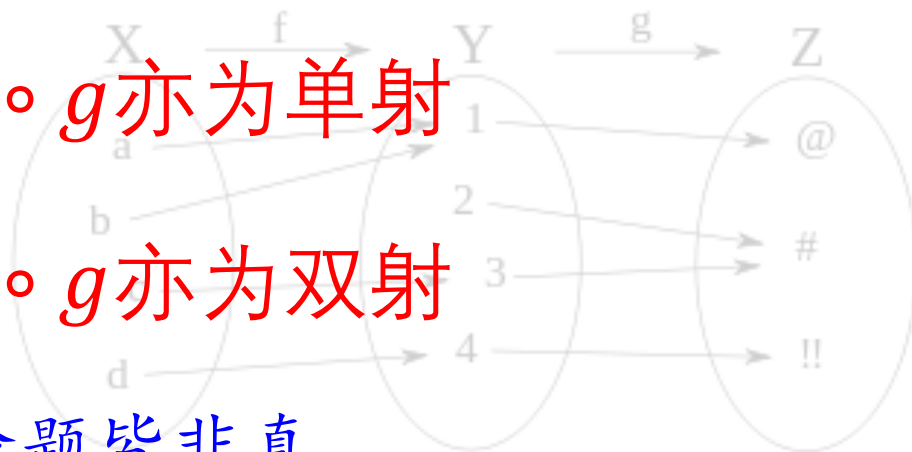
$g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ , 则:

(1) 若  $f, g$  为满射, 则  $f \circ g$  亦为满射

(2) 若  $f, g$  为单射, 则  $f \circ g$  亦为单射

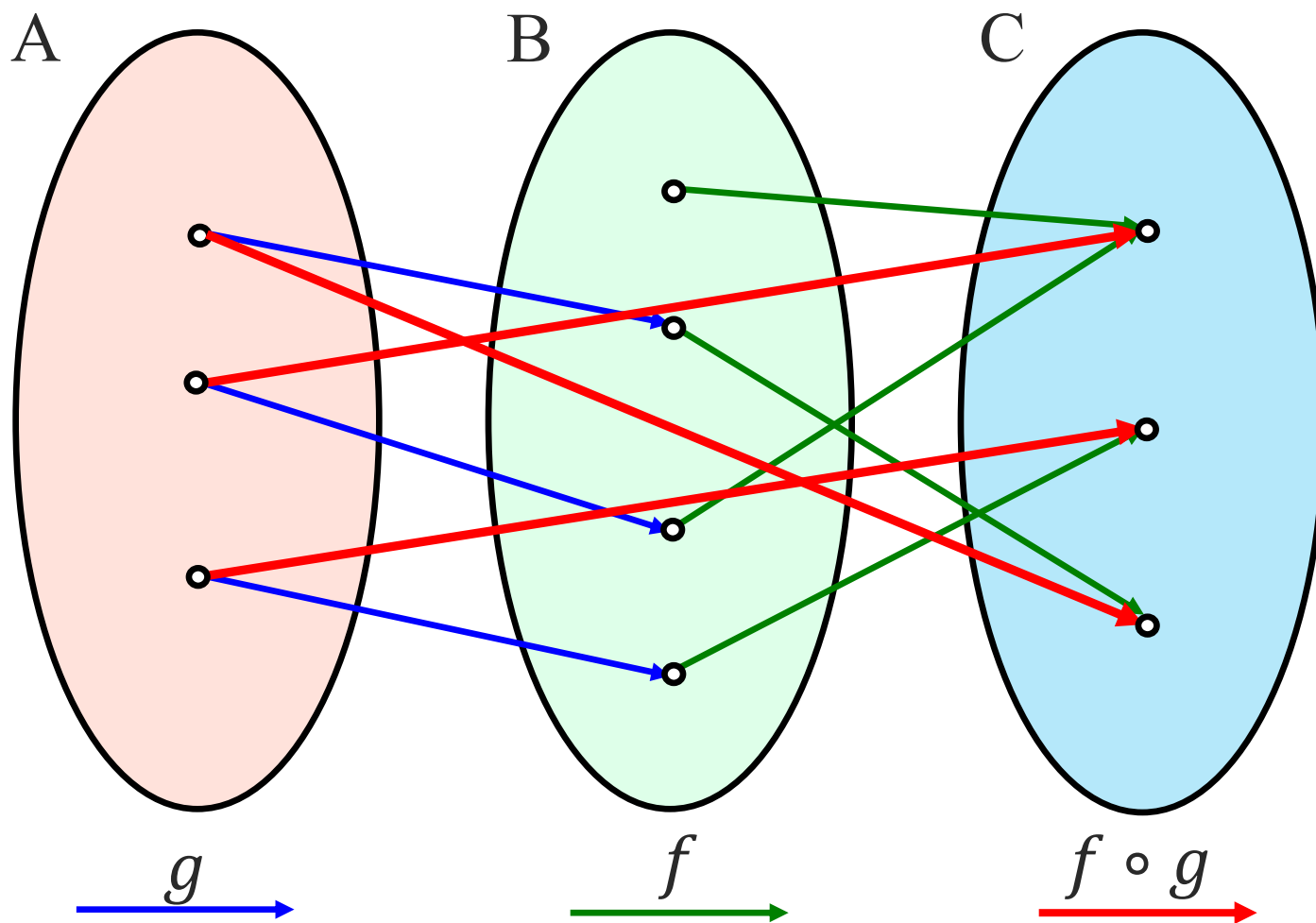
(3) 若  $f, g$  为双射, 则  $f \circ g$  亦为双射

○ **注意:** 上述命题的逆命题皆非真





# 函数的复合 (续)

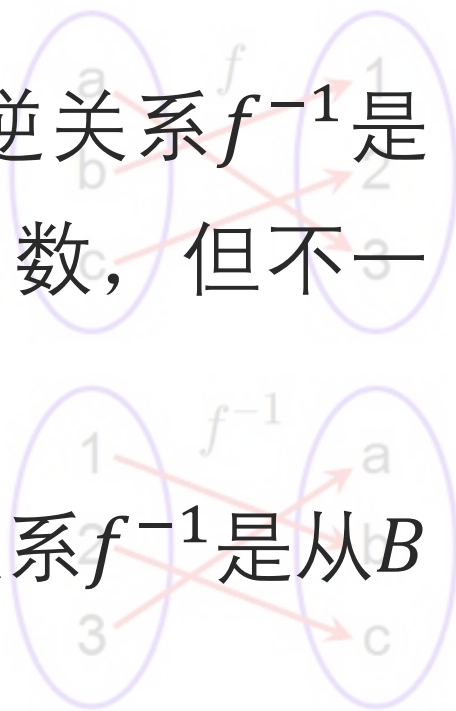




# 逆关系与函数



- 函数的逆关系不一定是函数，可能只是一个二元关系
- (1) 任给单射函数  $f: A \rightarrow B$ ，则逆关系  $f^{-1}$  是函数，且是  $\text{Ran}(f)$  到  $A$  的双射函数，但不一定是  $B$  到  $A$  的双射函数
- (2) 对双射函数  $f: A \rightarrow B$ ，则逆关系  $f^{-1}$  是从  $B$  到  $A$  的双射函数，即  $f^{-1}: B \rightarrow A$





# 逆关系与函数 (续)



证明: (1) 设  $f$  为 1-1

$$\because y f^{-1} x_1 \wedge y f^{-1} x_2 \rightarrow x_1 f y \wedge x_2 f y \rightarrow f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \rightarrow f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f^{-1}$  为函数。

(2) 设  $f$  1-1 and onto

$$\because \text{Dom}(f^{-1}) = \{y \mid (\exists x \in A)(f^{-1}(y) = x)\} = \{y \mid (\exists x \in A)(f(x) = y)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \text{Ran}(f) = B$$

$$\therefore f^{-1} : B \rightarrow A$$

又同理  $\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = A$ , 故  $f^{-1}$  为 onto。

$$\text{又 } x = f^{-1}(y) \wedge x = f^{-1}(z) \rightarrow f(x) = y \wedge f(x) = z \rightarrow y = z$$

故  $f^{-1}$  为 1-1。



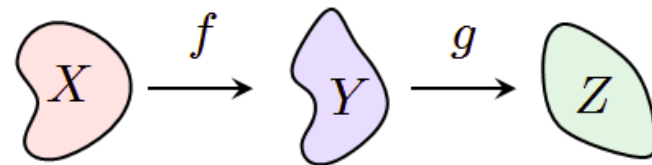
# 反函数



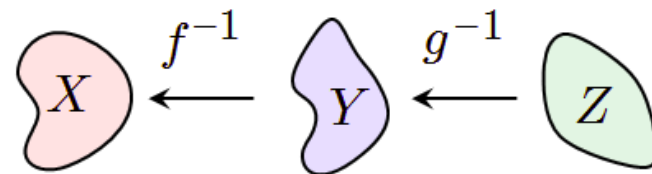
■ 定义 (反函数) : 若  $f: A \rightarrow B$  为双射函数, 则  $f$  的逆关系  $f^{-1}: B \rightarrow A$  称为  $f$  的反函数

■ 反函数的性质: 设  $f: A \rightarrow B$  是双射, 则:

(1)  $I_A: A \rightarrow A$  是双射函数



(2)  $f = f \circ I_A = I_B \circ f$



(3)  $f \circ f^{-1} = I_B, f^{-1} \circ f = I_A$



# 反函数 (续)



■ 证明: (1)和(2)易见;

$$f \circ f^{-1} = I_B, f^{-1} \circ f = I_A$$

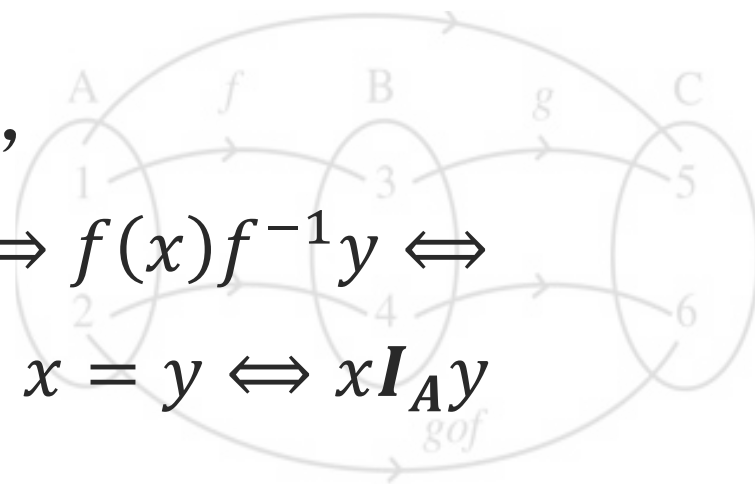
(3) 设  $f: A \rightarrow B$  为1-1且onto函数; 取  $y \in B$

$$\begin{aligned} \because y(f \circ f^{-1})x &\Leftrightarrow yf^{-1} \square fx \Leftrightarrow yf^{-1} \square \wedge \square fx \Leftrightarrow \\ \square fy \wedge \square fx &\Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow yI_Bx \end{aligned}$$

$\therefore f \circ f^{-1} = I_B$ ; 再取  $x \in A$ ,

$$\begin{aligned} \because x(f^{-1} \circ f)y &\Leftrightarrow xf \square f^{-1}y \Leftrightarrow f(x)f^{-1}y \Leftrightarrow \\ yff(x) &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow xI_Ay \end{aligned}$$

$$\therefore f^{-1} \circ f = I_A$$





# 李善兰 (1811–1882)



**李**善兰，原名李心兰，字竞芳，号秋纫，别号壬叔。浙江海宁人。清代著名的数学家、天文学家，力学家和植物学家。他所创立的二次平方根幂级数展开式及三角函数、反三角函数和对数函数幂级数展开式，是19世纪中国数学的主要成就之一。

李善兰9岁自学通《九章算术》，14岁通《几何原本》前六卷，钻研愈勤，造诣日深。咸丰初，旅居上海，1852~1859年与英国汉学家伟烈亚力（Alexander Wylie）合译欧几里得（Euclid）《几何原本》后九卷。又译《代微积拾级》、《重学》、《谈天》、《植物学》等，译笔严谨，创译了一大批科学名词，如代数、函数、指数、微分、积分、轴、坐标、切线、细胞等等，沿用至今。咸同之际，先后入江苏巡抚徐有壬、两江总督曾国藩幕，以精于数学而深得倚重。1860年起参与洋务运动中的科技活动，大力推动近代西方科学，尤其是天文学和植物学最新成果传入中国。同治七年（公元1868年），经巡抚郭嵩昭举荐，入京任同文馆算学总教习，历授户部郎中、总理衙门章京等职，加官三品衔。其主要著作汇集在13种24卷本《则古昔斋算学》内，其中对尖锥求积术的探讨已初具积分思想，对三角函数与对数幂级数展开式、高阶等差级数求和等问题相关解的研究皆达到中国传统数学的最高水平，他为解决三角自乘垛的求和问题提出的一个恒等式，被国际间命名为“李善兰恒等式”。他学通古今，融中西数学于一堂，是清代数学的杰出代表之一。李善兰渴望科学救国，一生译书、研学、育人，对促进近代中国科学的发展作出了卓越贡献。



# 本次课后作业



- 教材内容: [Rosen] 2.3 节
- 课后习题:
  - Problem Set 7
- 提交时间: 3月25日 10:00前

