

第一次习题课

主讲：赖司贤

助教：赖司贤、林辰、李景荣

特别鸣谢：刘翔宇，王光展，赵烜恒（去年助教）

说明

■ 成绩构成

- 平时成绩以作业为主 20%
- 期中考试 20%，期末考试 60%

■ 习题课（周二9-10节）内容

- 主要知识点回顾
- 知识的巩固拓展
 - 作业题问题讲解
 - 典型习题练习
- 自主答疑

作业发布与提交

- 每讲结束后在教学网站在线发布 Problem Set （习题册），一般每个习题册包含6—12个问题
- 当周作业在下周一上课前在教学网站提交PDF解题文件，手写拍照或电子稿均可（所有提交将进行防抄袭检测，抄袭作业将严重影响总评成绩）
- 作业成绩可在教学网站中各次作业下查询，并可在评语中看到错误题号和简要的错误原因提示

作业答疑

- 我们每周统计根据提交的作业情况选择重点难点题目讲解
 - 即使你的答案被认为可以接受，可能还是存在微小问题
- 非习题课时间亦可在群内提问，但是
 - 提交截止前
 - 只回答确实存在的题面表述问题
 - 习题课前的提问
 - 有选择的汇总至习题课回答
 - 习题课后提问
 - 尽量问习题课没讲过的

关于学术诚信

■ 几点注意事项

- 抄袭他人或网络资料的，属于严重违背学术诚信行为
- 提供他人抄袭机会同样有违学术诚信
- 可以进行不涉及最终解题的讨论
- 自己确实不会，查阅资料后做出并在答案后注明参考源的不视为抄袭
 - 但未必不影响分数
- 造假自然也有违学术诚信
 - 例如：上传损坏的文件谎称自己及时完成了提交
- 妨碍他人（例如攻击平台）当然也是不行的

■ 作业有违学术诚信原则的，分数归0



本课程的教学内容



- 逻辑与证明 (15%)
 - 命题逻辑、谓词逻辑、推理、证明方式
- 离散结构 (50%)
 - 集合、图、树
- 代数系统 (20%)
 - 群论、格、布尔代数
- 计数技术与离散概率 (15%)
 - 计数、组合数学、递归、离散概率

知识点回顾

- 命题与命题的值
- 命题的联结词
- 命题表达式
- 命题表达式的值
- 永真式、矛盾式与可能式
- 逻辑等价
- 命题逻辑的可判定性

命题与命题的值

- 命题是一个陈述语句，即一个陈述事实的句子
 - 要么真，要么假
 - 不能既真又假
- 判断下列句子是否为命题
 - ✓ ● 税收下降了
 - ✓ ● 我的收入上升了
 - ✓ ● 今天是星期五
 - ✗ ● 你会说英语吗?
 - ✗ ● $3-x=5$
 - ✗ ● 我们走吧!
 - ✓ ● 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
 - ✗ ● 他是个多好的人呀!
 - ✗ ● “我现在说的是假话。”

命题的联结词

- 需要用简单命题复合成复杂命题，这需要用到命题联结词（connective），常用的命题联结词有5个：否定（negation）、合取（conjunction）、析取（disjunction）、蕴涵（entailment）、双蕴涵（mutual entailment）
- 运算符的优先级： \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	\perp	\perp	T	\perp	\perp
\perp	T	\perp	T	T	\perp
\perp	\perp	\perp	\perp	T	T

命题表达式

- 假设 p 表示命题“我这星期买了彩票”， q 表示命题“我中了一百万元的特等奖”。试用汉语描述表达下列命题。
- $\neg p \vee (p \wedge q)$
 - 简单一点
 - $\neg p \vee (p \wedge q)$ (我这星期买了彩票并且中了一百万元的特等奖)
 - 我这星期没买彩票 \vee (我这星期买了彩票并且中了一百万元的特等奖)
 - 我这星期没买彩票，或者我这星期买了彩票并且中了一百万元的特等奖
 - “除非.....， 否则.....， ”/“或者.....， 或者.....”/“也许”
 - 除非我没买彩票， 否则我一定中了一百万元的特等奖。

命题表达式

除非你满16周岁, 否则只要你身高不足150cm就不能乘共享单车.

q : 你能乘共享单车

r : 你身高不足150cm

s : 你满16周岁

$s \vee (r \rightarrow \neg q)$

$(\neg s \wedge r) \rightarrow \neg q$

命题表达式的值

命题表达式 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ 的值

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

永真式、矛盾式与可能式

- 无论命题变元如何取值，表达式总为真为**永真式**，表达式总为假的为**矛盾式**，其余的为**可能式**。
- 试判断下列复合命题是否是可满足的。
 - $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
- 判断下列各式是否为永真式，并说明判断依据。
 - $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

逻辑等价

- p 和 q 逻辑等价：在所有可能情况下 p 和 q 都有相同的真值。
 - 也就是说， $p \leftrightarrow q$ 是永真式
 - $p \equiv q$

名 称	等价形式	名 称	等价形式
双重否定律	$A \leftrightarrow \neg\neg A$	支配律	$A \vee 1 \leftrightarrow 1, A \wedge 0 \leftrightarrow 0$
幂等律	$A \leftrightarrow A \vee A, A \leftrightarrow A \wedge A$	恒等律	$A \vee 0 \leftrightarrow A, A \wedge 1 \leftrightarrow A$
交换律	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$	排中律	$A \vee \neg A \leftrightarrow 1$
结合律	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	矛盾律	$A \wedge \neg A \leftrightarrow 0$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	蕴含等值式	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	等价等值式	$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	假言易位	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
		等价否定等值式	$A \leftrightarrow B \leftrightarrow \neg B \leftrightarrow \neg A$
		归谬论	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow \neg A$

逻辑等价

证明 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 与 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等价。

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ &\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} \\ &\equiv \neg p \wedge \neg q\end{aligned}$$

由德·摩根第二定律

由德·摩根第一定律

由双重否定律

由第二分配律

因为 $\neg p \wedge p \equiv \mathbf{F}$

由析取的交换律

由 \mathbf{F} 的恒等律

范式

- 命题变元及其否定总称为文字 (literal) ；
- 有限文字组成的析取式或合取式称为简单析取式或简单合取式；

简单合取式 $(\neg s \wedge r \wedge q)$ 简单析取式 $(\neg s \vee r \vee q)$

- 由有限简单合取式组成的析取式称析取范式，如 $(\neg s \wedge r \wedge q) \vee (s \wedge \neg r \wedge q)$
- 由有限简单析取式组成的合取式称合取范式，如 $(\neg s \vee r \vee q) \wedge (s \vee \neg r \vee q)$
- 析取范式与合取范式总称范式 (normal form)

主合取范式，主析取范式

- 设有 n 个命题变项，若在简单合取式中每个命题变项与其否定有且仅有一个出现一次，则这样的简单合取式叫做**极小项**。
- 设有 n 个命题变项，若在简单析取式中每个命题变项与其否定有且仅有一个出现一次，则这样的简单析取式叫做**极大项**。
- 如果析取范式中的**简单合取式全是极小项**，那么该析取范式就为**主析取范式**。
- 如果合取范式中的**简单析取式全是极大项**，那么该合取范式就为**主合取范式**。

主析取范式： $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q)$

不是主析取范式： $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

$(\neg p \wedge r) \equiv (\neg p \wedge r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge r \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q)$

练习

令 p 、 q 、 r 为如下命题：

p : 在这个地区发现过灰熊

q : 在乡间小路上徒步旅行是安全的。

r : 乡间小路两旁的草莓成熟了。

用 p 、 q 、 r 和逻辑连接词 (包括否定) 写出下列命题：

a) 乡间小路两旁的草莓成熟了，但在这个地区没有发现过灰熊。

$$r \wedge \neg p$$

b) 在这个地区没有发现过灰熊，且在乡间小路上徒步旅行是安全的，但乡间小路两旁的草莓成熟了。

$$\neg p \wedge q \wedge r$$

c) 如果乡间小路两旁的草莓成熟了，徒步旅行是安全的当且仅当在这个地区没有发现过灰熊。

$$r \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$$

d) 在乡间小路上徒步旅行是不安全的，但在这个地区没有发现过灰熊且小路两旁的草莓成熟了。

$$\neg q \wedge \neg p \wedge r$$

p: 在这个地区发现过灰熊

q: 在乡间小路上徒步旅行是安全的。

r: 乡间小路两旁的草莓成熟了。

e) 为了使在乡间小路上旅行很安全，其必要但非充分条件是乡间小路两旁的草莓没有成熟且在这个地区没有发现过灰熊。

$$q \rightarrow (\neg r \wedge \neg p)$$

f) 无论何时在这个地区发现过灰熊且乡间小路两旁的草莓成熟了，在乡间小路上徒步旅行就不安全。

$$p \wedge r \rightarrow \neg q$$

你有资格当美国总统当且仅当你已年满 35 岁，并且你出生在美国或者你出生时你的双亲是美国公民并且你再这个国家至少生活了 14 年。

用以下命题变元来表达答案：

e:“你有资格当美国总统”，

a: “你已年满 35 岁”，

b: “你出生在美国”，

p: “在你出生的时候，你的双亲均是美国公民”

r: “你在美国至少生活了 14 年”来表达你的答案。

$$e \leftrightarrow a \wedge (b \vee (p \wedge r))$$

把公式 $\varphi = (p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ 化成等价于它的析取范式与合取范式.

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv ((p \rightarrow q) \wedge r) \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg r) \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge r) \vee (\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg r) \\ &\equiv (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (p \rightarrow q)) \\ &\equiv ((\neg(p \rightarrow q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (p \rightarrow q))) \\ &\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee q)) \\ &\equiv ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \\ &\equiv (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)\end{aligned}$$

- 令 p 和 q 分别表示命题“选举已经有了结果”和“选票已经计数完毕”。
- 试用汉语表达下列各命题。
- a) $\neg p$
- b) $p \vee q$
- c) $\neg p \wedge q$
- d) $q \rightarrow p$
- e) $\neg q \rightarrow \neg p$
- f) $\neg p \rightarrow \neg q$
- g) $p \leftrightarrow q$
- h) $\neg q \vee (\neg p \wedge q)$

令 p 、 q 、 r 分别表示如下命题：

p ：你得了流感

q ：你错过期末考试

r ：你通过这门课

试用汉语表达下列各命题。

a) $p \rightarrow q$

b) $\neg q \leftrightarrow r$

c) $q \rightarrow \neg r$

d) $p \vee q \vee r$

e) $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$

f) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

思考题

- 探索：能否只用某一个二元逻辑运算符号，构建出所有的命题？有多少个这样的二元逻辑运算？（注：不保证答案大于0）
 - 例如：只使用 \vee ，不使用 \wedge 和 \rightarrow 等符号
 - 自定义一个二元逻辑运算：给出相应的真值表

- 定义逻辑运算符#： $a\#b = \neg(a \wedge b)$ ，判断#是否符合要求
 - 1. 验证 $a\#a = \neg a$ 。
 - 2. 尝试仅用#表示 $a \wedge b$ 、 $a \vee b$ 、 $a \rightarrow b$ 。
 - 3. 存在多少个不同的逻辑运算，满足题目条件？

定义逻辑运算符#： $a \# b = \neg(a \wedge b)$

1. 验证 $a \# a = \neg a$ 。

解： $a \# a = \neg(a \wedge a)$
 $= \neg a$ 幂等律


2. 用#表示 $a \wedge b$

$$\begin{aligned}\text{解: } a \wedge b &= \neg\neg(a \wedge b) && \text{双重否定律} \\ &= \neg(a \# b) && \text{定义} \\ &= (a \# b) \# (a \# b)\end{aligned}$$

2. 用#表示 $a \vee b$ 、 $a \rightarrow b$

$$\begin{aligned}\text{解: } a \vee b &= \neg(\neg a \wedge \neg b) && \text{德摩根律} \\ &= \neg(\neg((\neg a) \# (\neg b))) && \text{利用上一页的公式} \\ &= (\neg a) \# (\neg b) && \text{双重否定律} \\ &= (a \# a) \# (b \# b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解: } a \rightarrow b &= \neg a \vee b \\ &= (\neg\neg a) \# (\neg b) && \text{利用上方的公式} \\ &= a \# (\neg b) && \text{双重否定律} \\ &= a \# (b \# b)\end{aligned}$$

- 已验证仅使用逻辑运算符# (真值表如右图所示), $a\#b = \neg(a \wedge b)$, 可以表示 \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , , 因此可以构建出全部命题
- 我们称, $\{\#\}$ 构成的逻辑系统是完备的。

- 探索：能否只使用一个逻辑运算符号（可以自定义二元运算）构建出全部的命题？（不限制使用次数）
- 3. 存在多少个不同的逻辑运算，满足题目条件？
- 尝试：能否逐个验证所有的二元逻辑运算？

a	b	$a \odot b$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

每行有1或0两个选择，
一共有 $2^4=16$ 种二元逻辑运算！

能否快速去掉一些错误答案？

提示：可以先考虑该运算符能否表示 $\neg a$ 。

a	b	$a \odot b$
0	0	1
0	1	?
1	0	?
1	1	0

答案：只有两个逻辑运算符符合要求：

$$a \odot b = \neg(a \wedge b)$$

a	b	$a \odot b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$a \odot b = \neg(a \vee b)$$

a	b	$a \odot b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Problem 3

只有当你已经完成了专业要求，没有欠大学的钱，也没有图书馆的过期图书未还时，你才能从大学毕业。试用命题： g ：“你可以从大学毕业”， m ：“你欠大学的钱”， r ：“你已经完成了你的专业要求”， b ：“你有过期的图书馆图书未还”来表达前述复合命题。

- “只有 p ，才能 q ”的逻辑表达式是 $p \rightarrow q$ 还是 $q \rightarrow p$ ？

Problem 4

证明 $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 和 $q \rightarrow (p \vee r)$ 逻辑等价。

Problem 5

证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 和 $p \wedge q \rightarrow r$ 逻辑等价。

Problem 6

证明 $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ 和 $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$ 不是逻辑等价。

Problem 10

证明: 如果 p 、 q 和 r 是复合命题, 且 p 与 q 是逻辑等价的, q 与 r 是逻辑等价的, 则 p 与 r 是逻辑等价的。

■ 概念回顾

- $\neg p \wedge q \vee r \rightarrow s \leftrightarrow t$
- 赋值, 真值表, 永真式, 逻辑等价

■ 判断逻辑等价的方法

- 列真值表
- 利用等价替换

■ 观察Problem6的赋值

- “ $p \rightarrow q$ ”的成假赋值只有一种

Problem 10

证明: 如果 p 、 q 和 r 是复合命题, 且 p 与 q 是逻辑等价的, q 与 r 是逻辑等价的, 则 p 与 r 是逻辑等价的。

■ 不好的解答

- 证明 $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ 是永真式

■ 好的解答

p	q	r	由真值表, $p \equiv q$
T	T	T	
F	F	F	

证: ① p 为真, $\therefore p \equiv q$ $\therefore q$ 为真, $\therefore q \equiv r$ $\therefore r$ 为真
② p 为假 $\therefore p \equiv q$, $\therefore q$ 为假, $\therefore q \equiv r$ $\therefore r$ 为假
 $\therefore p \equiv r$

$\therefore p \equiv q$ $\therefore q \equiv r$
 $\therefore p, q$ 真值表相同 $\therefore q$ 和 r 真值表相同
 $\therefore p, r$ 真值表相同
 $\therefore p \equiv r$

Problem 1

试用真值表验证德·摩根第二定律 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ 。

Problem 6

判断 $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$ 是否为永真式。

Problem 7


证明 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 是永真式。

Problem 11

试判断下列复合命题是否是可满足的。

a) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$ 

- 判断永真式的方法
 - 列真值表
 - 利用等价替换
- 观察Problem7的赋值
 - “ $p \rightarrow q$ ”的成假赋值只有一种
- 黑板演示等价替换的细节
- 概念回顾
 - 可满足式
- 观察Problem11的赋值


Problem 8

(本题涉及自学内容)

给出下列事实及相关定义：

1. 假设给定一个有 n 个命题变元的真值表，那么可通过下面的方法构造一个与此表一致的复合命题：取各命题变元或其否定的合取式的析取式，其中的每个合取式对应一组真值组合，从而使得该复合命题为真。这样得到的复合命题称为**析取范式**。
2. 一组逻辑运算符称为是**功能完备的**，如果每个复合命题都逻辑等价于一个只含这些逻辑运算符的复合命题。

■ 解答的两种写法

- 任何命题都具有等价的合取/析取范式
-  可以用 \rightarrow 替代， \rightarrow 可以用 \neg, \vee 替代

复习

双重否定律	$A \leftrightarrow \neg\neg A$	支配律	$A \vee 1 \leftrightarrow 1, A \wedge 0 \leftrightarrow 0$
幂等律	$A \leftrightarrow A \vee A, A \leftrightarrow A \wedge A$	恒等律	$A \vee 0 \leftrightarrow A, A \wedge 1 \leftrightarrow A$
交换律	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$	排中律	$A \vee \neg A \leftrightarrow 1$
结合律	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	矛盾律	$A \wedge \neg A \leftrightarrow 0$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	蕴含等值式	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	等价等值式	$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	假言易位	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
		等价否定等值式	$A \leftrightarrow B \leftrightarrow \neg B \leftrightarrow \neg A$
		归谬论	$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow \neg A$

■ 思考

- $p \rightarrow q$ 的真值表合理吗?
- $p \leftrightarrow q$ 和 $p \Leftrightarrow q$ 一样吗?

■ 只允许使用表格中列出的等价规则

- 如何记住这么多等价规则?
- 以上周作业题为例, 演示等价规则的使用
- 若 $p \leftrightarrow q$ 永真式, 则 $p \Leftrightarrow q$ 可以作为一条等价规则
- 拓展: 冗余的等价规则, 完备性与可靠性

复习

■ 概念回顾

- 前提，结论，推理规则

■ 演示8条推理规则的使用

- $\neg p \wedge q, r \rightarrow p, \neg r \rightarrow s, s \rightarrow t \Rightarrow t$
- $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, r \rightarrow s \Rightarrow \neg q \rightarrow s$
- 从推理的视角理解上周作业第7,8题

■ 本课程范围内，命题逻辑的推理规则只需要掌握这8个

- 拓展： $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \Rightarrow r$

■ 拓展：用“附加前提法”证明 $p \rightarrow q$ 型结论

- $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg s \vee p, q \Rightarrow s \rightarrow r$
- $\vdash A \rightarrow A$

- 如果 $p, q \Rightarrow r$ ，则 $p \Rightarrow q \rightarrow r$ ，从这个视角理解上周作业第5题

附加	1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ ◦ ◦ ◦	前提 \Rightarrow 结论
化简	2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$	
假言推理	3. $A \rightarrow B, A \Rightarrow B$	
取拒式	4. $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$	
析取三段论	5. $A \vee B, \neg B \Rightarrow A$	
假言三段论	6. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$	
消解	7. $A \vee B, \neg A \vee C \Rightarrow B \vee C$	
合取引入	8. $A, B \Rightarrow A \wedge B$	

Thanks for listening

- Q & A

三一、漂亮猫

没有哪只漂亮的猫不爱交际。

没有哪只没尾巴的猫会与大猩猩玩。

有胡子的猫总是漂亮的。

没有哪只爱交际的猫会有利爪。

没有胡子的猫就没有尾巴。

因此：

没有哪只有利爪的猫会与大猩猩玩。

这个推论在逻辑上正确吗？

详解参见参考答案19。

.....

一〇五、河马逻辑

我不吃我的帽子。

如果河马不吃橡树果，那么橡树将生长在非洲。

如果橡树不生长在非洲，那么松鼠会冬眠。

如果河马吃橡树果，而且松鼠会冬眠，那么我将吃我的帽子。

那么，结果如何呢？

详解参见参考答案54。

二五、找出假硬币

2003年2月，格雷夫森德的哈罗德·霍普伍德写了一封短信给《每日电讯报》，说他从1937年以来每天都会做该报纸上的谜题，但是有一道题从他学生时代以来就一直萦绕在他脑际，当他82岁时，终于决定寻求一些帮助。

这道谜题是这样的，有12枚硬币，除了一枚硬币比其他硬币轻或重外，其余硬币都一样重。要求找出哪一枚硬币与众不同，不管它比其他硬币轻还是重，最多只能用天平称重三次。这种天平没有重量刻度，只有两个托盘，可以判断是两边一样重，还是重的一边下沉，轻的一边上升。



只有一枚硬币比其他硬币轻或重；称重三次，找出这枚硬币

在继续阅读之前，应当先了解一下故事背景，相当有意思。

在数天内，这家报纸的信访部已收到关于这道谜题的362封信和一些电话，几乎都是来问答案的，他们打电话给我。我知道这个问题是“天平称重”类的经典谜题，但是我忘记答案了。在我接电话时，我朋友马

奥贝尔尼提供了一种“决策树”解决方案，也就是马蒂和我提出的方法。他还提到了1950年“布兰奇·笛卡儿”在剑桥大学本科生数学学会“阿基米德论者”的期刊《尤里卡》上发表的优雅解决方案。笛卡儿女士实际上是塞德里克A.B.史密斯，她的解决方案是天才的杰作。菲尼克斯·费德利斯迪克思教授曾用一首诗来描述这一解决方案，大意为：

F将硬币排成一行，

用粉笔将每个硬币用一个字母标记，

那么要组成这句话“F AM NOT LICKED”，

（他脑海中冒出一个主意），

现在他会遵照他母亲的吩咐：

妈妈喜欢（MA DO LIKE）

我来找（ME TO FIND）

二五、找出假硬币 | 31

假硬币（FAKE COIN）

这首诗隐藏了三次称重，一次称4枚硬币就可以解决问题，而且正如《尤里卡》上所解释的（这首诗还押韵），为了使人信服，我将根据硬币的轻重列出各次称重的结果。这里L是指左边的托盘下沉，R是指右边的托盘下沉，一是指两边一样重。

假硬币	第一次称重	第二次称重	第三次称重
F重	—	R	L
F轻	—	L	R
A重	L	—	L
A轻	R	—	R
M重	L	L	—
M轻	R	R	—
N重	—	R	R
N轻	—	L	L
O重	L	L	R
O轻	R	R	L
T重	—	L	—
T轻	—	R	—
L重	R	—	—
L轻	L	—	—
I重	R	R	R
I轻	L	L	L
C重	—	—	R
C轻	—	—	L
K重	R	—	L
K轻	L	—	R
E重	R	L	L
E轻	L	R	R
D重	L	R	—
D轻	R	L	—

假硬币（FAKE COIN）

这首诗隐藏了三次称重，一次称4枚硬币就可以解决问题，而且正如《尤里卡》上所解释的（这首诗还押韵），为了使人信服，我将根据硬币的轻重列出各次称重的结果。这里L是指左边的托盘下沉，R是指右边的托盘下沉，一是指两边一样重。

假硬币	第一次称重	第二次称重	第三次称重
F重	—	R	L
F轻	—	L	R
A重	L	—	L
A轻	R	—	R
M重	L	L	—
M轻	R	R	—
N重	—	R	R
N轻	—	L	L
O重	L	L	R
O轻	R	R	L
T重	—	L	—
T轻	—	R	—
L重	R	—	—
L轻	L	—	—
I重	R	R	R
I轻	L	L	L
C重	—	—	R
C轻	—	—	L
K重	R	—	L
K轻	L	—	R
E重	R	L	L
E轻	L	R	R
D重	L	R	—
D轻	R	L	—

32 | 数学万花筒：五光十色的数学谜题和逸事

从上表中可以发现，每种称法都得到了不同的结果。

虽然《每日电讯报》公布了有效的解决方案，但是事情还没完。读者以极其荒谬的理由反对我们的答案。他们写信改进这个答案，但采用的方法却未必有效。有人发E-mail提出笛卡儿女士的解决方案或者其他类似的方案；有人告诉我们关于称重的其他问题；有人感谢我们让他们不用费脑筋；有人骂我们揭开了旧伤疤。仿佛某个巨大的民间秘密智慧水库突然出现了裂口。一名记者想起20世纪60年代BBC电视台曾播放过这道谜题，并在第二天晚上公布过答案。糟糕的是，这封信接着写道，“我不记得为什么有人首先提出这个问题，也不记得那是否是我与它的初次相识；我感觉并不是。”

30 | 数学万花筒：五光十色的数学谜题和逸事

蒂正好也在，他也看出了这个问题。他青少年时代也为这道题困惑过，但成功地解决了它，最终他成为了一名数学家。

当然，他忘记答案是如何得出来的了，但是我们提出了一种称重比较各组硬币的方法，并且发表在报纸上。

事实上，这个谜题有很多答案，包括一种非常巧妙的方案。就在我最终在《每日电讯报》上发表我们的不太优雅的方法的那天，我记起了这种办法。20年前我在《新科学家》杂志上看到过这种方法，后来在托马斯H.奥贝尔尼的《谜题与潘多拉魔盒》一书中再次出现了，这本书就放在我的书架上。

这样的谜题似乎每20年左右出现一次，大概是新一代人发现了它们，就好比当人们失去所有免疫力时，流行病会暴发。奥贝尔尼将这道题追溯到1945年的霍华德·格罗斯曼，但实际上它诞生的时间肯定比这个时间早得多，要追溯到17世纪了。就算哪天我们在巴比伦的契形文字板上发现这道题，我也不会有丝毫惊讶的。

奥贝尔尼提供了一种“决策树”解决方案，也就是马蒂和我提出的方法。他还提到了1950年“布兰奇·笛卡儿”在剑桥大学本科生数学学会“阿基米德论者”的期刊《尤里卡》上发表的优雅解决方案。笛卡儿女