

# 离散数学习题课 3

助教：李景荣，赖司贤，林辰

南京大学数学系

2025 年 4 月 29 日

① Problem Set 17

② Problem Set 18

③ 补充

① Problem Set 17

② Problem Set 18

③ 补充

## Problem 2: 函数空间与运算表

题目：设集合  $A = \{0, 1\}$ ,  $S = A^A$

- (1) 列出  $S$  中的所有元素
- (2) 给出函数复合运算表，指出单位元、零元和逆元

## Problem 2: 函数空间与运算表

题目：设集合  $A = \{0, 1\}$ ,  $S = A^A$

(1) 列出  $S$  中的所有元素

(2) 给出函数复合运算表，指出单位元、零元和逆元

解答：

(1) 四个函数：

$$f_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}, \quad f_2 = \{(0, 0), (1, 1)\}$$

$$f_3 = \{(0, 1), (1, 0)\}, \quad f_4 = \{(0, 1), (1, 1)\}$$

(2) 运算性质：

- 单位元： $f_2$  (恒等映射)
- 零元：无 (但  $f_1$  是右零元)
- 逆元： $f_2^{-1} = f_2$ ,  $f_3^{-1} = f_3$

## Problem 3: 集合封闭性分析

题目：设集合  $A = \{a, b, c\}$ ，判断：

- (1)  $A$  对普通加法是否封闭？
- (2)  $A$  对普通乘法是否封闭？

## Problem 3: 集合封闭性分析

题目：设集合  $A = \{a, b, c\}$ ，判断：

(1)  $A$  对普通加法是否封闭？

(2)  $A$  对普通乘法是否封闭？

解答：

(1) 不封闭：设  $a$  为最大绝对值元素，则  $a + a = 2a \notin A$

(2) 可封闭：取  $A = \{-1, 0, 1\}$ ，验证乘法表封闭

## Problem 4: 运算封闭性判断

题目：判断下列集合是否封闭：

- (1) 非零整数集合  $\mathbb{Z}^*$  对除法
- (2) 可逆矩阵集合对加法和乘法
- (3) 正实数集对  $a \circ b = ab - a - b$
- (4)  $S = \{\ln n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$  对加法和乘法

## Problem 4: 运算封闭性判断

题目：判断下列集合是否封闭：

- (1) 非零整数集合  $\mathbb{Z}^*$  对除法
- (2) 可逆矩阵集合对加法和乘法
- (3) 正实数集对  $a \circ b = ab - a - b$
- (4)  $S = \{\ln n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$  对加法和乘法

解答：

- (1) 不封闭 (反例:  $1/2 \notin \mathbb{Z}^*$ )
- (2) 不封闭 (反例:  $I + (-I) = 0$ )
- (3) 不封闭 (反例:  $2 \circ 2 = 0 \notin \mathbb{R}^+$ )
- (4) 不封闭 ( $\ln m + \ln n = \ln(mn) \in S$ )

## Problem 6: 代数系统判断

题目：判断  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$  对运算是否构成代数系统：

(1)  $x * y = \gcd(x, y)$

(2)  $x * y = \text{lcm}(x, y)$

(3)  $x * y = \max(x, y)$

(4)  $x * y = \text{区间质数个数}$

## Problem 9: 自同态构造

题目：给定运算表，构造两个非恒等映射的自同态。

# Problem 9: 自同态构造

题目：给定运算表，构造两个非恒等映射的自同态。

解答：

运算表：

$\circ$	$a$	$b$	$c$
$a$	$b$	$a$	$b$
$b$	$b$	$b$	$b$
$c$	$b$	$b$	$b$

有效同态：

- $f_1 : a \mapsto b, b \mapsto b, c \mapsto b$

- $f_2 : a \mapsto b, b \mapsto b, c \mapsto c$

验证：对任意  $x, y$ ，满足

$$f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$$

# Problem 10: 二元运算分析

题目：分析运算  $\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$

# Problem 10: 二元运算分析

题目：分析运算  $\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$

解答：

- 交换律：不成立（反例： $\langle 2, 3 \rangle * \langle 4, 5 \rangle \neq \langle 4, 5 \rangle * \langle 2, 3 \rangle$ ）
- 结合律：成立（展开后表达式相同）
- 单位元： $\langle 1, 0 \rangle$
- 逆元： $\langle a^{-1}, -b/a \rangle$ （需  $a \neq 0$ ）

# Problem 11: 满同态证明

题目：证明  $f(x) = x \bmod n$  是  $\mathbb{Z}$  到  $\mathbb{Z}_n$  的满同态。

# Problem 11: 满同态证明

题目：证明  $f(x) = x \bmod n$  是  $\mathbb{Z}$  到  $\mathbb{Z}_n$  的满同态。

解答：

① 运算保持：

- 加法：  $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$
- 乘法：  $f(xy) = f(x) \otimes f(y)$

② 满射性：对任意  $k \in \mathbb{Z}_n$ ，存在  $k \in \mathbb{Z}$  使得  $f(k) = k$

③ 结论：  $f$  为满同态

① Problem Set 17

② Problem Set 18

③ 补充

# Problem 3

问题：证明有单位元且满足消去律的有限半群一定是群。

# Problem 3

问题：证明有单位元且满足消去律的有限半群一定是群。

关键思路：

- 有限性  $\Rightarrow$  元素幂次重复
- 消去律  $\Rightarrow$  构造逆元

# Problem 3

问题：证明有单位元且满足消去律的有限半群一定是群。

关键思路：

- 有限性  $\Rightarrow$  元素幂次重复
- 消去律  $\Rightarrow$  构造逆元

证明步骤：

- ①  $\forall a \in G$ , 考虑序列  $a, a^2, a^3, \dots$
- ② 有限性  $\Rightarrow \exists k > l$  使得  $a^k = a^l$
- ③ 令  $m = k - l$ , 则  $a^l = a^l a^m$ , 消去得  $a^m = e$
- ④ 若  $m = 1$ , 则  $a = e$ ; 否则  $a^{m-1}$  是逆元

# Problem 4

问题：偶数阶群中必存在非单位元  $g$  满足  $g = g^{-1}$ 。

# Problem 4

问题：偶数阶群中必存在非单位元  $g$  满足  $g = g^{-1}$ 。

反证法：

- 假设所有非单位元  $g \neq g^{-1}$
- 将元素两两配对  $(g, g^{-1})$ ，总数为奇数
- 但  $|G|$  为偶数，矛盾！

# Problem 4

问题：偶数阶群中必存在非单位元  $g$  满足  $g = g^{-1}$ 。

反证法：

- 假设所有非单位元  $g \neq g^{-1}$
- 将元素两两配对  $(g, g^{-1})$ ，总数为奇数
- 但  $|G|$  为偶数，矛盾！

即：

$$G = \{e\} \cup \{g_1, g_1^{-1}\} \cup \{g_2, g_2^{-1}\} \cup \dots$$

元素个数必为奇数  $\Rightarrow$  假设不成立

# Problem 6

问题：证明结合律。归纳基础：当  $n = 2$  时，唯一运算  $(a_1 \cdot a_2)$ ，结论成立。

归纳假设：假设对所有长度  $\leq k$  的序列，任意括号顺序等价于左结合形式：

$$(((\cdots (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdots) \cdot a_k$$

归纳步骤 ( $n = k + 1$ ):

- 设最先运算为  $(a_i \cdot a_{i+1}) = b \in S$  ( $1 \leq i \leq k$ )
- 应用归纳假设，原式等价：

$$(\cdots \underbrace{(((\cdots (a_1 \cdot a_2) \cdots) \cdot a_i) \cdot a_{i+1}) \cdots)}_{\text{左结合形式}} \cdot a_{k+1}$$

- 通过结合律递归展开，最终等价于左结合形式

# Problem 7

问题：证明  $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$  是群。

# Problem 7

问题：证明  $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$  是群。

验证群公理：

- ① 封闭性：  $[a]_n, [b]_n \in \mathbb{Z}_n^* \Rightarrow \gcd(ab, n) = 1$
- ② 结合律：继承整数乘法结合律
- ③ 单位元：  $[1]_n$
- ④ 逆元：由 Bezout 定理， $\exists k$  使  $[k]_n \times [a]_n = [1]_n$

# Problem 7

问题：证明  $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$  是群。

验证群公理：

- ① 封闭性：  $[a]_n, [b]_n \in \mathbb{Z}_n^* \Rightarrow \gcd(ab, n) = 1$
- ② 结合律：继承整数乘法结合律
- ③ 单位元：  $[1]_n$
- ④ 逆元：由 Bezout 定理， $\exists k$  使  $[k]_n \times [a]_n = [1]_n$

关键点：

$$\gcd(a, n) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z}, ax + ny = 1 \Rightarrow [x]_n = [a]_n^{-1}$$

# Problem 8

问题：无单位元的半群能否添加元素  $e$  成为么半群？

# Problem 8

问题：无单位元的半群能否添加元素  $e$  成为么半群？

构造方法：

- 添加新元素  $e$ ，定义运算：

$$e \circ x = x \circ e = x, \quad \forall x \in M \cup \{e\}$$

- 验证结合律：原半群的结合律保持不变，新元素运算天然满足

# Problem 8

问题：无单位元的半群能否添加元素  $e$  成为么半群？

构造方法：

- 添加新元素  $e$ ，定义运算：

$$e \circ x = x \circ e = x, \quad \forall x \in M \cup \{e\}$$

- 验证结合律：原半群的结合律保持不变，新元素运算天然满足

例子：原半群  $M = \{a, b\}$ ，乘法表：

$\circ$	$a$	$b$
$a$	$a$	$a$
$b$	$b$	$b$

添加  $e$  后成为么半群

# Problem 10

问题：唯一二阶元素  $a$  与所有元素可交换。

# Problem 10

问题：唯一二阶元素  $a$  与所有元素可交换。

反证法：

- 假设  $\exists b$  使  $ab \neq ba$
- 计算共轭元素： $bab^{-1}$  是二阶元
- 由唯一性得  $bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab$ ，矛盾！

# Problem 10

问题：唯一二阶元素  $a$  与所有元素可交换。

反证法：

- 假设  $\exists b$  使  $ab \neq ba$
- 计算共轭元素： $bab^{-1}$  是二阶元
- 由唯一性得  $bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab$ ，矛盾！

关键等式：

$$(bab^{-1})^2 = bab^{-1}bab^{-1} = ba^2b^{-1} = bb^{-1} = e$$

但  $a$  唯一，故  $bab^{-1} = a$

① Problem Set 17

② Problem Set 18

③ 补充

# 离散数学习题课 3

助教：李景荣，赖司贤，林辰

南京大学数学系

2025 年 4 月 29 日

# 线性群示例

## 例 1.2.14

- 一般线性群:  $GL_n(\mathbb{R}) = \{n \text{ 阶实方阵 } A : \det A \neq 0\}$
- 特殊线性群:  $SL_n(\mathbb{R}) = \{n \text{ 阶实方阵 } A : \det A = 1\}$

## 例 1.2.15

区间  $I$  上全体连续函数构成 Abel 群:

$$(f + g)(x) \triangleq f(x) + g(x)$$

$$0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f + 0 = f$$

$$(-f)(x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f + (-f) = 0$$

# 置换群 $S(X)$

## 例 1.2.16

设  $X$  为非空集:

- 置换:  $X \rightarrow X$  的双射
- $S(X) = \{X \text{ 上所有置换}\}$
- 当  $|X| = n$  时,  $|S(X)| = n!$

群运算性质:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$\text{单位元: } \text{id}_X(x) = x$$

$$f^{-1}: \text{逆映射, } f \circ f^{-1} = \text{id}_X$$

## 四元数群 $D$

- 定义:  $D = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
- 乘法规则:

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

- 非 Abel 群 ( $ij \neq ji$ )

# Hamilton 四元数

## 代数结构

- 四元数:  $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
- 共轭:  $\bar{z} = a - bi - cj - dk$
- 模长:  $|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
- 乘积性质:  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

*Thanks!*