

离散数学习题课 2

助教：李景荣，赖司贤，林辰

南京大学数学系

2025 年 3 月 4 日

① Problem Set 2 作业答疑

② 回顾和拓展

③ Problem Set 3

④ 复习和拓展

① Problem Set 2 作业答疑

② 回顾和拓展

③ Problem Set 3

④ 复习和拓展

Problem 2

问题 2: 论证有效性判断

前提:

- $p \rightarrow r$
- $q \rightarrow \neg r$
- $p \vee q$

结论: $\neg r$

分析: 论证无效。当赋值:

- $p = \text{假}, q = \text{假}, r = \text{真}$ 时
- 所有前提均为真, 但结论 $\neg r$ 为假

Problem 4

使用命题逻辑的推理理论证明：从以下三个前提：1、“如果天不下雨或天不起雾，则帆船比赛将举行，且救生表演将如期进行。”；2、“如果帆船比赛举行，则将颁发奖杯。”以及3、“没有颁发奖杯。”可得到结论：“天下雨了。”

符号化：

- p : 天不下雨 q : 天不起雾
- s : 帆船赛举行 t : 救生表演进行
- u : 颁发奖杯

证明路径：前提： $(p \vee q) \rightarrow (s \wedge t)$, $s \rightarrow u$, $\neg u$ 。结论： $\neg p$

证明路径：前提： $(p \vee q) \rightarrow (s \wedge t)$, $s \rightarrow u$, $\neg u$ 。结论： $\neg p$

步骤 | 理由

1. $\neg u$ 前提引入
2. $s \rightarrow u$ 前提引入
3. $\neg s$ 取拒式，使用 (1) 和 (2)
4. $(p \vee q) \rightarrow (s \wedge t)$ 前提引入
5. $\neg(s \wedge t) \rightarrow \neg(p \vee q)$ 从 (4) 的逆否命题得出
6. $(\neg s \vee \neg t) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 德·摩根律，对 (5) 使用
7. $\neg s \vee \neg t$ 附加律，使用 (3)
8. $\neg p \wedge \neg q$ 假言推理，使用 (7) 和 (6)
9. $\neg p$ 化简律，使用 (8)

Problem 5

这是一个广为流传的逻辑谜题：一个男孩和一个女孩正在交谈。
“我是男孩，”黑发的孩子说。“我是女孩，”金发的孩子说。若已知他们当中至少有一个人在说谎。试用命题逻辑语言描述这个谜题，并通过命题逻辑的推理理论证明：两个孩子都在说谎。

问题描述

两个孩子的头发颜色与性别关系：

- 黑发的孩子是男孩 $\Rightarrow p$
- 金发的孩子是女孩 $\Rightarrow q$

已知：

- 对话来自一男一女 $\Rightarrow p \leftrightarrow q$
(等价)
- 至少一人说谎 $\Rightarrow \neg p \vee \neg q$

命题符号化

前提 1: $p \leftrightarrow q$

前提 2: $\neg p \vee \neg q$

结论: $\neg p \wedge \neg q$

证明步骤.

- ① 前提引入 $p \leftrightarrow q$ (前提 1)
- ② 前提引入 $\neg p \vee \neg q$ (前提 2)
- ③ $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (1)
- ④ 应用德摩根定律: $\neg(p \wedge q)$ (由 2)
- ⑤ 析取三段论: $\neg p \wedge \neg q$ (3,4)



Problem 6 (1) - 问题描述

- 甲说：我会游泳
- 乙说：甲不会游泳
- 丙说：乙不会游泳
- 丁说：我们有三个人会游泳

已知条件：

- 只有一人说假话
- 需要确定：
 - 谁说真话/假话
 - 谁会/不会游泳

Problem 6 (2) - 自然语言推理

- ① 甲与乙矛盾 必有一真一假
- ② 根据条件 假话在甲乙之间，丙丁必说真话
- ③ 丙说真话 乙不会游泳
- ④ 丁说真话 三人会游泳

结论：

$$\begin{cases} \text{真话者：甲、丙、丁} & (\text{三人会游泳}) \\ \text{假话者：乙} \end{cases}$$

Problem 6 (3) - 命题逻辑推理

符号定义:

$$\begin{cases} A: p & \text{甲会游泳} \\ B: \neg p & \text{乙的陈述} \\ C: \neg q & \text{丙的陈述} \\ D: (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee \dots & \text{丁的陈述} \end{cases}$$

逻辑推导:

$$F: (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \vee \dots$$

$$G: C \wedge D \quad (\text{化简 } F \text{ 结果})$$

$$H: p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \quad (\text{最终结论})$$

验证结果:

$$\underbrace{P}_{\text{甲}} \wedge \underbrace{\neg q}_{\text{乙}} \wedge \underbrace{r}_{\text{丙}} \wedge \underbrace{s}_{\text{丁}}$$

① Problem Set 2 作业答疑

② 回顾和拓展

③ Problem Set 3

④ 复习和拓展

知识点回顾

命题逻辑中的推理系统

自然推理系统

用命题逻辑进行推理

唯一可读性定理

对任意公式 α ，下列陈述有且仅有一条适用：

- ① α 是命题符号
- ② α 形为 $(\neg\alpha_0)$ ，其中 α_0 为合式公式
- ③ α 形为 $(\alpha_1 * \alpha_2)$ ，其中 α_1, α_2 为合式公式， $*$ 为二元联结词

唯一性保证：

- 情形 (2) 中的 α_0 唯一
- 情形 (3) 中的 α_1, α_2 和 $*$ 唯一

形式语言 **vs** 自然语言:

- 自然语言歧义常与语义相关
- 形式语言要求纯语法无歧义

括号省略规则

- ① 最外层括号可略: $(\alpha \vee \beta) \mapsto \alpha \vee \beta$
- ② 否定符管辖范围:
 - $\neg\alpha \vee \beta \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
 - 避免 $\neg(\alpha \vee \beta)$ 歧义
- ③ 右结合规则:
 - $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
 - 适用于相同联结词连续出现

核心定理

可靠性定理 (Soundness)

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

- 形式系统的推导结果在语义上必然成立
- 保证推理过程不会产生"假结论"

完备性定理 (Completeness)

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

- 所有语义真理均可通过形式系统推导
- 确保形式系统的表达能力足够强

等价性结论

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \varphi$$

维度 语法蕴含 ($\Gamma \vdash \varphi$) 语义蕴含 ($\Gamma \models \varphi$)

定义基础 基于推理规则 (如假言推理、MP 规则) 基于模型真值 (真值表、赋值函数)

验证方法 符号演算 (形式证明序列) 模型论验证 (真值保持性)

系统依赖性 依赖公理系统设计 (如 Hilbert 系统) 独立于具体形式系统

非经典逻辑 不同系统结果可能冲突 (如直觉主义逻辑) 通常保持经典语义核心

哲学意义 强调推理的可计算性 反映命题的真理性

具体案例

例 (假言推理)

语法蕴含:

1. $A \rightarrow B$ [Premise]
2. A [Premise]
3. B [MP 1,2]

语义蕴含:

- 对任意赋值 v :

$$v(A) = 1 \text{ 且 } v(A \rightarrow B) = 1$$

$$\Rightarrow v(B) = 1$$

定理验证

可靠性 \Rightarrow 语法推导有效

完备性 \Rightarrow 语义真理可证

① Problem Set 2 作业答疑

② 回顾和拓展

③ Problem Set 3

④ 复习和拓展

Problem Set 3 - Problem 1

令 $C(x)$ 为谓词 “ x 有一只猫作为宠物。”， $D(x)$ 为谓词 “ x 有一只狗作为宠物。”， $F(x)$ 为谓词 “ x 有一只雪貂作为宠物。”。试用谓词 $C(x)$, $D(x)$, $F(x)$ 、量词和逻辑联结词表达以下各自然语言语句。设论域为班上的全体有学生。(a) 班上的一个学生有一只猫、一只狗和一只雪貂作为宠物。(b) 班上的所有学生有一只猫或一只狗或一只雪貂作为宠物。(c) 班上的一些学生有一只猫和一只雪貂作为宠物，但没有狗作为宠物。(d) 班上没有学生同时有一只猫、一只狗和一只雪貂作为宠物。(e) 对猫、狗和雪貂这三种动物的任意一种，班上都有学生将其作为宠物。

注意变量的自由出现和约束出现

Problem Set 3 - Problem 3

求下列命题表达式的真值：

- $\exists!xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$
- $\forall xP(x) \rightarrow \exists!xP(x)$
- $\exists!x\neg P(x) \rightarrow \neg\forall xP(x)$

Problem Set 3 - Problem 4(1)

离散数学班上有 1 个数学专业的新生，12 个数学专业的二年级学生，15 个计算机专业二年级学生，1 个数学专业的三年级学生，2 个计算机专业的三年级学生，和 1 个计算机专业的四年级学生。

- 用量词表达下列语句，再给出其真值。
 - 班上有一个三年级学生。
 - 班上每个学生都是计算机专业的。
 - 班上有个学生既不是数学专业的，也不是三年级学生。
 - 班上每个学生要么是二年级学生，要么是计算机专业的。
 - 存在这样一个专业使得该班级有这个专业每一个年级的学生。

Problem Set 3 - Problem 4(2)

令 $P(s, c, m)$ 表示语句“学生 s 为 m 专业的 c 年级学生”， s 的论域为离散数学的全部学生， c 的论域为四个年级， m 的论域为所有专业。各语句的表达及真值如下：

- $\exists s \exists m P(s, \text{三}, m)$ ，为真。
- $\forall s \exists c P(s, c, \text{计算机科学})$ ，为假。
- $\exists s \exists c \exists m (P(s, c, m) \wedge (c \neq \text{三}) \wedge (m \neq \text{数学}))$ ，为真。
- $\forall s (\exists c P(s, c, \text{计算机科学}) \vee \exists m P(s, \text{二}, m))$ ，为假。
- $\exists m \forall c \exists s P(s, c, m)$ ，为假。

Problem Set 3 - Problem 5

自定义谓词，用谓词逻辑公式和相关数学运算符表达自然语言语句“有一个正整数不是三个整数的平方和。”
主要问题在论域选择和表述。

Problem Set 3 - Problem 6

用推理规则证明：如果 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ 和 $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ 为真，则 $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ 为真。

步骤 推理

-
- 1 $\forall x(P(x) \wedge R(x))$
前提
 - 2 $P(a) \wedge R(a)$
全称示例 (1)
 - 3 $P(a)$
简化 (2)
 - 4 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(s) \wedge S(x)))$
前提
 - 5 $Q(a) \wedge S(a)$
(3)、(4)
 - 6 $S(a)$
简化 (5)
 - 7 $R(a)$
简化 (2)
 - 8 $R(a) \wedge S(a)$ (6, 7)
 - 9 $\forall x(R(x) \wedge S(x))$
全称推广 (5)

① Problem Set 2 作业答疑

② 回顾和拓展

③ Problem Set 3

④ 复习和拓展

自由出现与约束出现

示例

- 积分表达式: $\int_0^1 f(x, t) dt$, 其中 t 为约束变元, x 为自由变元
- 求和表达式: $\sum_{i=1}^n a_i$, 其中 i 为哑元, n 为自由变元

自由出现的递归定义

变元 x 在公式 φ 中 **自由出现**, 当且仅当:

- ① φ 是原子公式, 且 x 出现在其中
- ② $\varphi = \neg\psi$, 且 x 在 ψ 中自由出现
- ③ $\varphi = \psi \rightarrow \theta$, 且 x 在 ψ 或 θ 中自由出现
- ④ 不存在量词 $\forall y$ 或 $\exists y$ 约束 x

背景

- 希尔伯特计划 (1920s): 寻求完备且一致的数学形式系统
- 核心目标:
 - 完备性: 所有真命题可被证明
 - 一致性: 系统内无矛盾
 - 可判定性: 存在算法判定命题真伪
- 哥德尔 1931 年论文《论数学原理及相关系统的形式不可判定命题》颠覆了这一愿景

第一不完全性定理

定理陈述

任何包含初等算术的**一致**形式系统，都存在既不能证明也不能证伪的命题

关键要素：

- 哥德尔编码：将命题映射为自然数 ($\#P =$ "命题 P 的哥德尔数")
- 自指命题："本命题在系统 S 中不可证"
- 构造过程：
 - 证明系统内可表达元数学陈述
 - 对角线引理的应用

第二定理与影响

第二定理

任何包含算术的一致系统，其一致性不能在系统内部证明

哲学影响：

- 数学真理 形式可证性
- 人类直觉 vs 机械计算
- 对人工智能的启示（Lucas-Penrose 论证）

科学应用：

- 计算理论（图灵停机问题）
- 类型论与证明论发展
- 自指系统研究（生物学、计算机病毒）

总结

- 核心结论：形式化数学存在本质局限
- 现代发展：
- 推荐阅读：
 - Gödel, 1931 原始论文
 - 《哥德尔证明》(Nagel & Newman)
 - 《GEB：一条永恒的金带》

一些推荐书目

数理逻辑证明及其限度 郝兆宽
逻辑的引擎 马丁戴维斯

说明

注意不要用 ai 解答注意书写规范

Thanks!