

第五次习题课

助教：李景荣，赖司贤，林辰

南京大学数学系

2025 年 3 月 25 日

① Problem Set 7 知识点回顾

② Problem Set 7

③ Problem set8 知识点回顾

④ Problem Set 8

⑤ 拓展

① Problem Set 7 知识点回顾

② Problem Set 7

③ Problem set8 知识点回顾

④ Problem Set 8

⑤ 拓展

函数基础概念

- 设 $F : A \rightarrow B$
 - 值域: $\text{Ran}(F) \subseteq B$
 - 陪域 (codomain): B
- 函数集合表示:

$$B^A = \{F \mid F : A \rightarrow B\} \quad (\text{读作"B 上 A"})$$

映射类型

定义：设 $f : A \rightarrow B$

① 满射 (surjection/onto):

$$\text{Ran}(f) = B$$

② 单射 (injection/1-1):

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

③ 双射 (bijection):

- 同时满足单射和满射
- 即 $1-1 \wedge \text{onto}$

函数复合与反函数

复合定理：设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$

- 复合保持性质：
 - f, g 满射 $\Rightarrow f \circ g$ 满射
 - f, g 单射 $\Rightarrow f \circ g$ 单射
 - f, g 双射 $\Rightarrow f \circ g$ 双射

注意：逆命题不成立

反函数定义：

- 若 $f: A \rightarrow B$ 为双射
- 则逆关系 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是函数
- 称 f^{-1} 为 f 的反函数

① Problem Set 7 知识点回顾

② Problem Set 7

③ Problem set8 知识点回顾

④ Problem Set 8

⑤ 拓展

Problem 4

设 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的解析式为 $f(x, y) = (x + y, x - y)$, 试证明: f 是双射。

证明:

(1) 单射: 对于任意的 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 若 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ 则 $(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$, 解得 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. 故 f 是单射.

(2) 满射: 对于所有的 $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 令 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. 则 $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 且 $f(x, y) = (x + y, x - y) = (u, v)$. 故 f 是满射. 综上, f 是双射的。

Problem 10

设 f 是从 Y 到 Z 的可逆函数, g 是从 X 到 Y 的可逆函数。证明 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

补充: 设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$ 是函数。证明:

$$(f \circ g = I_Y) \wedge (g \circ f = I_X) \iff (f^{-1} = g) \wedge (g^{-1} = f)$$

其中 I_X, I_Y 分别是集合上的恒等函数。

补充

- 正向证明：由函数复合推逆函数关系
 - ① 由 $g \circ f = I_X$ 可知复合函数为双射，故 f 是单射， g 是满射
 - ② 同理 $f \circ g = I_Y$ 说明 g 是单射， f 是满射
 - ③ 综上 f, g 均为双射函数，满足 $f^{-1} = g$ 且 $g^{-1} = f$
- 逆向证明：由逆函数关系推函数复合
 - ① 对任意 $x \in X$ ，有 $g(f(x)) = g(y) = x = I_X(x)$
 - ② 对任意 $y \in Y$ ，有 $f(g(y)) = f(x) = y = I_Y(y)$
 - ③ 因此 $f \circ g = I_Y$ 且 $g \circ f = I_X$

① Problem Set 7 知识点回顾

② Problem Set 7

③ Problem set8 知识点回顾

④ Problem Set 8

⑤ 拓展

知识点回顾

- 无穷公理与自然数
- 集合的基数
- 整数的性质
- 质数
- 最大公约数

无穷公理与自然数

- 后继运算
 - 定义: $x^+ = x \cup \{x\}$
 - 通过后继运算递归定义自然数
- 无穷公理 (**ZFC** 第七条)

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \rightarrow x^+ \in A))$$

- 满足条件的集合称为归纳集
- 自然数集定义: $\mathbb{N} = \bigcap \{A \mid A \text{ 为归纳集}\}$

Peano 算术公理

- ① 存在性: $0 \in \mathbb{N}$
- ② 后继封闭: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$
- ③ 后继唯一性: $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$
- ④ 初始元: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \neq n^+$
- ⑤ 数学归纳法:

$$0 \in A \wedge (\forall x \in A, x^+ \in A) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$$

注: 其中 \mathbb{N} 是满足这些公理的最小归纳集

基数 (cardinal) / 势 (cardinality)

集合 A 所包含的元素的个数, 记作 $\text{card } A$ 或 $|A|$ 。

有限集的势即为集合所含元素的个数, 即

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow (A \approx n \leftrightarrow |A| = n).$$

无穷集合的势用等势来衡量他们间的关系

等势

集合 A 等于于 B 指存在一个双射 $f: A \rightarrow B$ 。记为 $A \approx B$ 。

$A \approx B$ 意味着 A, B 中的元素可以“一一对应”。

要证明 $A \approx B$, 找出任意一个从 A 到 B 的双射即可。

优势

集合 A 优于 B 指存在一个单射 $f: B \rightarrow A$ 。记为 $B \leq A$

真优势

A 优于 B 相当于 B 与 A 的某个子集等势

可数集

集合 A 不是有限集则称 A 为无穷集。 $A \approx \mathbb{N}$ 时称 A 为可数集。
教材定义: A 为可数集 $\Leftrightarrow A \approx \mathbb{N}$ 或 A 为有限集 (作业中尽量按这个理解)。

可数个可数集的并、笛卡尔积仍是可数集。

可直观的理解为集合的元素可以按确定的顺序线性排列, 即: 对序列中任一元素, 可以明确指出它的“前一个”元素和“后一个”元素

Cantor 定理

$\mathbb{N} < \mathbb{R}$ (经典对角线法则) $A < P(A)$ (反证法并考虑 $x \in A | x \notin f(x)$)

幂集的基数: $P(A) \approx \{0, 1\}^A = \{f | f: A \rightarrow \{0, 1\}\}$
 $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{Q} < \mathbb{R} \simeq P(\mathbb{N})$

① Problem Set 7 知识点回顾

② Problem Set 7

③ Problem set8 知识点回顾

④ Problem Set 8

⑤ 拓展

Problem 3

设 A, B 为可数集, 证明:

(1) $A \cup B$ 是可数集;

(2) $A \times B$ 是可数集.

Problem 3

设 A, B 为可数集, 证明:

(1) $A \cup B$ 是可数集;

(2) $A \times B$ 是可数集.

答案:

(1) 若两个集合都是有限集, 那么 $\text{card}(A \cup B) = n + m \leq \aleph_0$. 若其一为无限集且另一为无穷可数集, 不妨设 A 为其中的有限集且 $\text{card}(A) = n$, 则可以构造如下双射 $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$: 当 $x \in A$ 时, 若 $x = a_i$, 则 $h(x) = i$; 当 $x \in B$ 时, 若 $x = b_j$, 则 $h(x) = j + n$. 如果 $\text{card}(A) = \text{card}(B) = \aleph_0$, 那么存在双射 $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ 和 $g: B \rightarrow \mathbb{N}$. 如下构造函数 $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$,

$$h(x) = \begin{cases} 2i & , \quad x \in A \wedge x = a_i \\ 2j + 1 & , \quad x \in B \wedge x = b_j \end{cases}$$

显然 h 为双射. 这就证明了 $\text{card}(A \cup B) = \aleph_0$.

(2) 若两个集合都是有限集, 那么 $\text{card}(A \times B) = nm \leq \aleph_0$. 若其一为有限集而另一为无穷可数集, 不妨设 A 为其中的有限集, 可以构造双射 $h: A \times B \rightarrow N$. $h(\langle ai, bj \rangle) = i + jn$. 如果 $\text{card } A = \text{card } B = \aleph_0$, 那么存在双射 $f: A \rightarrow N$ 和 $g: B \rightarrow N$. 构造函数 $h: A \times B \rightarrow N$,

$$h(\langle x, y \rangle) = \frac{(i+j+1)(i+j)}{2} + i, \quad f(x) = i, g(y) = j$$

显然 h 是双射的. 从而得到 $\text{card}(A \times B) = \aleph_0$.

Problem 5

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子, 使得 $A \setminus B$ 是:

- a) 有限集
- b) 可数无限集
- c) 不可数集

Problem 5

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子，使得 $A \setminus B$ 是：

- a) 有限集
- b) 可数无限集
- c) 不可数集

解答：

[构造方法] 令 $A = \mathbb{R}$ ，按以下方式选择 B ：

- a) 有限差集：取 $B = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
此时 $A \setminus B = \{x_1, \dots, x_n\}$ 有限，且 B 仍不可数

Problem 5

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子, 使得 $A \setminus B$ 是:

- a) 有限集
- b) 可数无限集
- c) 不可数集

解答:

[构造方法] 令 $A = \mathbb{R}$, 按以下方式选择 B :

- a) 有限差集: 取 $B = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
此时 $A \setminus B = \{x_1, \dots, x_n\}$ 有限, 且 B 仍不可数
- b) 可数差集: 取 $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
此时 $A \setminus B = \mathbb{Q}$ 可数, 且 B 为无理数集不可数

Problem 5

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子, 使得 $A \setminus B$ 是:

- a) 有限集
- b) 可数无限集
- c) 不可数集

解答:

[构造方法] 令 $A = \mathbb{R}$, 按以下方式选择 B :

- a) 有限差集: 取 $B = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
此时 $A \setminus B = \{x_1, \dots, x_n\}$ 有限, 且 B 仍不可数
- b) 可数差集: 取 $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
此时 $A \setminus B = \mathbb{Q}$ 可数, 且 B 为无理数集不可数
- c) 不可数差集: 取 $B = [0, 1]$
此时 $A \setminus B = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 仍不可数

Problem 7

定理：设 A 是可数集，若存在满射 $f: A \rightarrow B$ ，则 B 可数

Problem 7

定理：设 A 是可数集，若存在满射 $f: A \rightarrow B$ ，则 B 可数

证明步骤.

① 情况 1: $A = \emptyset \implies B = \emptyset$ ，显然可数

Problem 7

定理：设 A 是可数集，若存在满射 $f: A \rightarrow B$ ，则 B 可数

证明步骤.

- ① 情况 1: $A = \emptyset \implies B = \emptyset$ ，显然可数
- ② 情况 2: $A \neq \emptyset$
 - 由满射定义， $\forall b \in B, \exists a \in A$ 使 $f(a) = b$
 - 构造单射 $g: B \hookrightarrow A$ (选择公理保证原像存在性)
 - 因 $|B| \leq |A| \leq \aleph_0$ ，故 B 可数



Problem 8

设 $A = \{a, b, c\}$, 证明 $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A$

Problem 10

定理：可数多个可数集的并集仍是可数的模仿 $\mathbb{N}^*\mathbb{N}$ 证明

Problem 11

已知条件:

- $A \cap B = A \cap C = \emptyset$
- 存在双射 $f: B \rightarrow C$ (记作 $B \sim C$)

目标: 证明 $A \cup B \sim A \cup C$

构造映射: 定义函数 $g: A \cup B \rightarrow A \cup C$:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{当 } x \in A \\ f(x) & \text{当 } x \in B \end{cases}$$

其中 $A \cap B = \emptyset$ 保证定义无冲突

单射性验证: 若 $g(x_1) = g(x_2)$, 则:

- 当结果属于 A 时: $x_1 = x_2 \in A$
- 当结果属于 C 时: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ (因 f 是双射)

满射性验证：对任意 $y \in A \cup C$ ：

- 若 $y \in A$ ：取 $x = y \in A \cup B$ 即有 $g(x) = y$
- 若 $y \in C$ ：存在 $x \in B$ 使 $f(x) = y$ ，此时 $g(x) = f(x) = y$

结论： g 是双射，故 $A \cup B \sim A \cup C$

Problem 12

令 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 为所有仅由数字 1, 2 或 3 构成的无限长序列的集合。证明该集合不可数。

答案：方案 1: 假设 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 可数，则我们将其中所有元素按照某种顺序列出：

$$L_1 = a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$L_2 = a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

使用下列规则构造一个新的串 L

$$L = a_1a_2a_3\dots$$

其中

$$a_i = \begin{cases} 2 & a_{ii} = 1 \\ 1 & a_{ii} \neq 1 \end{cases}$$

方案 2: $\text{card } \{1, 2\}^\omega \leq \text{card } \{1, 2, 3\}^\omega$, 而 $\text{card } \{1, 2\}^\omega \approx \text{card } \{0, 1\}^\omega$. 由于 $[0, 1) \approx \{0, 1\}^\omega$, 从而 $\text{card } \mathbb{R} \leq \text{card } \{1, 2, 3\}^\omega$, $\{1, 2, 3\}^\omega$ 不可数。($\{0, 1\}$ 的证明参见课件)

方案 3: 构造一个从 $(0, 1)$ 到 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 的单射.

让 $r \in (0, 1) = 0.d_1d_2d_3d_4\dots$, $d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

其中 $0 = \{111\}1 = \{112\}2 = \{113\}3 = \{121\}4 = \{122\}5 = \{123\}6 = \{131\}7 = \{132\}8 = \{133\}9 = \{211\}$

例如 0.123 可以转换为 112113121, 0.999 可以转换为 211211211.

这样任意一个 $(0, 1)$ 中的实数均可以表示为 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 中的不同元素, 得到一个从 $(0, 1)$ 到 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 的单射.

$\text{card } (0, 1) \leq \text{card } \{1, 2, 3\}^\omega$, $(0, 1)$ 不可数, $\{1, 2, 3\}^\omega$ 不可数。

Problem 13

试利用 Cantor-Bernstein-Schröder (三明治) 引理证明:

$$2^{\mathbb{N}} \approx [0, 1).$$

提示: 将自然数 2 写为集合 $\{0, 1\}$ 的形式, 考虑用二进制对实数进行编码。

Problem 13

试利用 Cantor-Bernstein-Schröder (三明治) 引理证明:

$$2^{\mathbb{N}} \approx [0, 1).$$

提示: 将自然数 2 写为集合 $\{0, 1\}$ 的形式, 考虑用二进制对实数进行编码。

解法步骤如下:

Problem 13

试利用 Cantor-Bernstein-Schröder (三明治) 引理证明:

$2^{\mathbb{N}} \approx [0, 1)$ 。

提示: 将自然数 2 写为集合 $\{0, 1\}$ 的形式, 考虑用二进制对实数进行编码。

解法步骤如下:

首先, 我们定义一个从 $2^{\mathbb{N}}$ 到 $[0, 1)$ 的映射 f 和另一个方向上的映射 g :

Problem 13

试利用 Cantor-Bernstein-Schröder (三明治) 引理证明:

$2^{\mathbb{N}} \approx [0, 1)$ 。

提示: 将自然数 2 写为集合 $\{0, 1\}$ 的形式, 考虑用二进制对实数进行编码。

解法步骤如下:

首先, 我们定义一个从 $2^{\mathbb{N}}$ 到 $[0, 1)$ 的映射 f 和另一个方向上的映射 g :

- 对于每个无限序列 $(a_1, a_2, \dots) \in 2^{\mathbb{N}}$ (其中每一个 $a_i = 0$ 或者 1), 我们可以将其视为小数点后的一串数字, 并且得到对应的实数在区间 $[0, 1)$ 上.

$$f((a_1, a_2, \dots)) = 0.a_1 a_2 \dots$$

这个函数显然是单射.

然后再构造反向的映射 g :

给定任意 $x \in [0,1)$, 我们可以写出它的二进制表示 (如果存在两种不同的方式表达同一个 x 值时选择非终止性的方式):

设其二进制展开形如

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i / 2^i, b_i \in \{0, 1\}.$$

定义

$$g(x) = (b_1, b_2, \dots).$$

易见该映射也是良构并且唯一确定了对应关系。

然后再构造反向的映射 g :

给定任意 $x \in [0,1)$, 我们可以写出它的二进制表示 (如果存在两种不同的方式表达同一个 x 值时选择非终止性的方式):

设其二进制展开形如

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i / 2^i, b_i \in \{0, 1\}.$$

定义

$$g(x) = (b_1, b_2, \dots).$$

易见该映射也是良构并且唯一确定了对应关系。

根据 Cantor–Bernstein theorem 可知若两个集之间分别存在一对一嵌入则它们具有相同的基数从而完成证明过程。

① Problem Set 7 知识点回顾

② Problem Set 7

③ Problem set8 知识点回顾

④ Problem Set 8

⑤ 拓展

一些集合的基数

- 实数区间 $[0, 1]$
基数：连续统 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 。
理由：与实数集 \mathbb{R} 等势（例如双射 $f(x) = \tan(\pi x - \pi/2)$ ）。
- 康托尔集
基数：连续统 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 。
理由：三进制表示仅含 0 和 2，与二进制序列集合 $2^{\mathbb{N}}$ 等势。
- 函数集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
基数：连续统 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 。
理由：基数运算规则：

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

基数相关示例 (续)

- 无限二进制序列的集合 $2^{\mathbb{N}}$
基数: 连续统 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 。
理由: 直接由定义可知, 每个序列对应唯一的实数二进制展开 (需处理重复表示问题)。
- 无理数集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
基数: 连续统 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 。
理由: 无理数集是实数集去掉可数的有理数集, 故

$$|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

- 超越数 (非代数数) 集合
基数: 连续统 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 。
理由: 代数数可数, 超越数作为其补集与实数集等势。

- 不含全 0 的无限二进制序列集合 $S_f \subseteq 2^{\mathbb{N}}$

基数：连续统 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 。

理由：定义映射 $f(s) = 0.s_1s_2s_3\ldots_{(2)}$ (二进制小数)，排除全 0 序列后仍与 $[0, 1]$ 等势。

- 分母不小于 4 的正有理数集合 $\mathbb{Q}_{>0} \setminus \{\frac{p}{q} \mid q < 4\}$

基数：可数 \aleph_0 。

理由：对角线法则不适用，该集合为可数集 \mathbb{Q} 的无穷子集，仍可枚举为序列：

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \cdots$$

总结

- 十进制不含 **0** 的实数集

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{十进制表示无数字 } 0\}$$

基数：连续统 \mathfrak{c} 。

理由：构造双射 $g: X \rightarrow [0, 1]$ ，将每个数字 $d \in \{1, \dots, 9\}$ 映射为 $d - 1$ ，例如：

$$0.9173 \dots \mapsto 0.8062 \dots_{(10)}$$

- 十进制含有限个 **1** 的实数集

$$Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{十进制表示中 } 1 \text{ 出现有限次}\}$$

基数：连续统 \mathfrak{c} 。

理由：基数算术

连续统假设

陈述

不存在集合 A , 使得:

$$\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$$

即: 实数集的基数 2^{\aleph_0} 是紧接 \aleph_0 的下一个无穷基数 ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$)。

- 历史: 由康托尔提出 (1878), 希尔伯特第一问题 (1900)。
- 独立性: 哥德尔 (1940) 证明 CH 与 ZFC 一致; 科恩 (1963) 证明 CH 与 ZFC 独立 (力迫法)。
- 现状: 在 ZFC 中既不能证明也不能证伪, 需引入新公理 (如大基数公理)。

Thanks!