

习题课

助教：林辰，李景荣，赖司贤

主讲人：林辰

提醒

- 请不要把答案写在题目缝隙里
- 答案请书写完整
- 分类逻辑清晰
- 其他提醒

Problem Set 9

Problem 1

设 a, b, c, d 均为正整数，下列命题是否为真？若为真，给出证明；否则，给出反例。

a) 若 $a \mid c, b \mid c$, 则 $ab \mid c$

b) 若 $a \mid c, b \mid d$, 则 $ab \mid cd$

c) 若 $ab \mid c$, 则 $a \mid c$

d) 若 $a \mid bc$, 则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$

■ 如果命题为真，请给出证明，如果命题为假，请给出反例！

Problem 2

证明：若 p 是大于 3 的素数，则 $p^2 - 1$ 是 24 的倍数。

- 分别说明可以被3和8整除即可

- $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$

Problem 3

计算：

a) $23300 \bmod 11$

b) $2^{3300} \bmod 31$

c) $3^{516} \bmod 7$

■ 乘法分解

Problem 4

证明：如果 $2^n - 1$ 是素数，则 n 也为素数。

- 反证法
- 因式分解

Problem 5

证明：

a) 设 $d \geq 1$, $d \mid m$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$.

b) 设 $d \geq 1$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow da \equiv db \pmod{dm}$.

c) 设 c 与 m 互质, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ca \equiv cb \pmod{m}$.

- Problem 5 bc 注意是双向箭头, 需要分别说明充分性和必要性 (左推右和右推左)。另外, 不建议直接用双向箭头证明, 因为其中部分步骤是在有前提条件下双向箭头才成立的。

Problem 6

借助于费马小定理证明如果 n 是一个正整数, 则 42 能整除 $n^7 - n$ 。

- Problem 6 注意, Fermat 小定理 $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 成立的前提条件是 $p \nmid n$ 。如果用这个证明需要分类讨论 n 是否被 p 整除。

Problem 9

证明：对于任意小于 n 且与 n 互质的正整数 a ，存在一个小于 n 且与 n 互质的正整数 b ，使得 $ab \equiv 1 \pmod{n}$ 。

- Problem 9 完整的证明应该包含以下内容：1. 构造出 b ; 2. 证明此时 $ab \equiv 1 \pmod{n}$; 3. 证明此时 b 小于 n 且与 n 互质。

补充题目

■ 对于任意大于5的合数，有 $n|(n-1)!$

5. 设 $n > 1$ 是奇数, 证明: $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1})(n-1)!$ 被 n 整除.

Problem Set 10

- 此课时旨在联系数学归纳法，所以请尽量用数学归纳法证明。且数学归纳法请按照格式完整叙述。

Problem 1

试给出以下集合的递归定义:

- (a) 正奇数集合;
- (b) 整系数多项式的集合;
- (c) 3 的正整数次幂的集合.

- Problem 1b 基础步骤中包含整数集合和所有的变元, 之后用加法乘法生成即可。某些错误答案中基础步骤中仅包含 1, 后续步骤仅有加法和乘法, 则没有办法生成系数为负数的多项式。

Problem 6

试证明算术基本定理：每个大于 1 的自然数，要么本身就是质数，要么可以写为 2 个或以上的质数的积，且这些质因子按大小排列之后，仅有唯一的表示.

- 利用强归纳可证

- 不要遗漏是唯一的表示

Problem 8

试证明：在任意长度有限的 0/1 序列中，字符串 01 至多比字符串 10 多出现 1 次。

- Problem 8 一个很好的证明方式是利用数学归纳法证明以下加强命题：设字符串 01 出现 A 次，字符串 10 出现 B 次，则当开头数字和结尾数字相同时， $A = B$ ，当开头为 1，结尾为 0 时， $A - B = -1$ ，当开头为 0，结尾为 1 时， $A - B = 1$ 。

Problem 10

试证明：对于任意正整数 n ，一定存在 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列，使得在排列中这些数任何两个数的平均值都不会出现在这两个数之间.

只需证明当 n 为 2 的整数次幂时结论成立:

Problem Set 16

Problem 2

对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq),$$

回答下述问题.

- a) 求极大元素.
- b) 求极小元素.
- c) 存在最大元素吗? 如果存在请求出.
- d) 存在最小元素吗? 如果存在请求出.
- e) 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界.
- f) 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界.
- g) 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界.
- h) 如果存在的话, 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界.

■ 缺少极大元

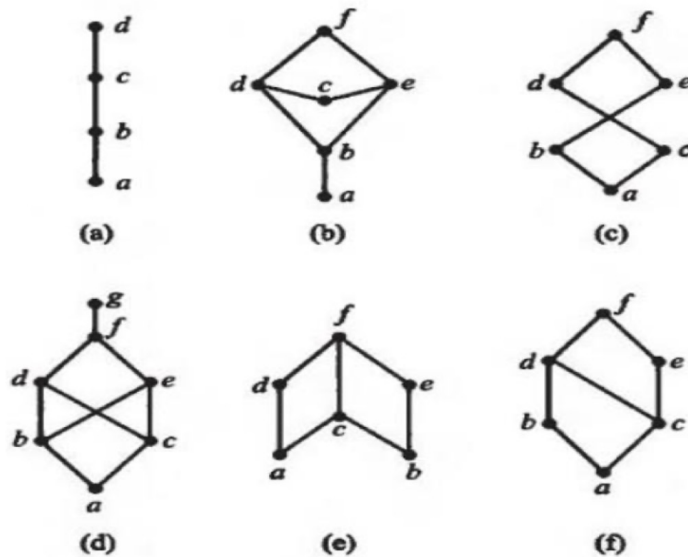
Problem 3

已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 A 上的整除关系, 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图.

■ 画的好看一点...

Problem 4

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 请说明理由.



对于不是格的情况, 需要说明理由

Thanks for listening

- Q & A