

习题课

助教：林辰，李景荣，赖司贤

主讲人：林辰

Problem Set 19

记号： $o(g)$ 表示元素的阶数

Problem 1

设 H 是 G 的子群, 证明 H 在 G 中的所有左陪集中有且只有一个是 G 的子群, 即 $\exists! K \in \{aH \mid a \in G\}$ 使得 K 是 G 的子群.

- 左陪集分解有何特点?
- 无交并

Problem 2

设 $\langle G, * \rangle$ 为有限群, A 与 B 是 G 的两个非空子集, 且 $|A| + |B| > |G|$.

证明: $G = AB$, 这里 $AB = \{a * b \mid \forall a \in A \wedge \forall b \in B\}$.

- 只需要证明 $G \subseteq AB$.
- 不等式 \rightarrow 交不为空
- 如何将不等式与 G 中元素联系起来?

Problem 3

设 H 是群 G 的子群, $x \in G$, 令 $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$, 证明 xHx^{-1} 是 G 的子群, 称为 H 的共轭子群.

- 子群的定义

- 单位元, ab^{-1}

Problem 4

设 H 和 K 分别为群 G 的 r, s 阶子群, 若 r 与 s 互素, 证明 $H \cap K = \{e\}$.

- Lagrange定理: 子群的阶数是群的阶数的因子
- $H \cap K$ 既是 H 的子群, 也是 K 的子群

Problem 5

证明：若 G 中只有一个 2 阶元，则这个 2 阶元一定与 G 中所有元素可交换.

■ xax^{-1} 的阶数是多少？

在这里，采用记号 $o(g)$ 表示元素的阶数

Problem 6

证明：在群 G 中，如果 $g, h \in G$ 满足 $gh = hg$ ，并且 $\gcd(|g|, |h|) = 1$ ，那么 $|gh| = |g||h|$.

(提示：令 $N = |gh||g|$ ，使用阶的性质和交换律.)

■ 阶数的定义？

在这里，采用记号 $o(g)$ 表示元素的阶数

Problem 7

设群 G 有子群 H , H 是正规子群当且仅当

$$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$$

.

证明: 如果群 G 有且只有一个 d 阶子群, 那么这个子群是正规的.

■ 正规子群: $gHg^{-1} = H$

Problem 8

证明：使用阶的概念证明费马小定理. 即对素数 p 和任意整数 a , 均有 $a^p \equiv a \pmod{p}$.

(提示：考虑集合 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$ 在乘法下构成的群. 使用拉格朗日定理的拓展：元素的阶和群的阶之间的关系.)

■ \mathbb{Z}_p^* 的阶数是多少？

Problem 9

列出 Klein 四元群的所有子群，并从子群的角度说明其与 \mathbb{Z}_4 不同. (即只存在这两种不同的四阶群.)

- 列举出Klein四元群的所有子群 (5个)
- 列举出 \mathbb{Z}_4 的所有子群 (3个)
- 注意不要缺漏!
- 如何说明它们不同?

Problem 10

对于群 G 的一个非空子集 S 定义如下关系: $a \sim b$ 当且仅当 $ab^{-1} \in S$.

证明: \sim 是等价关系当且仅当 S 是群 G 的子群.

- 等价关系?

- 自反性、对称性、传递性

- 子群?

- 单位元、逆元、乘法封闭

- 充分性和必要性需要分别说明, 不可出现“显然成立”“易证”等