

习题课

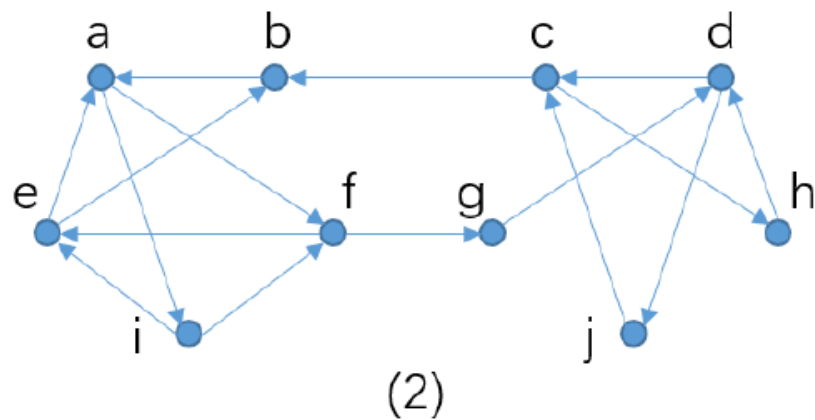
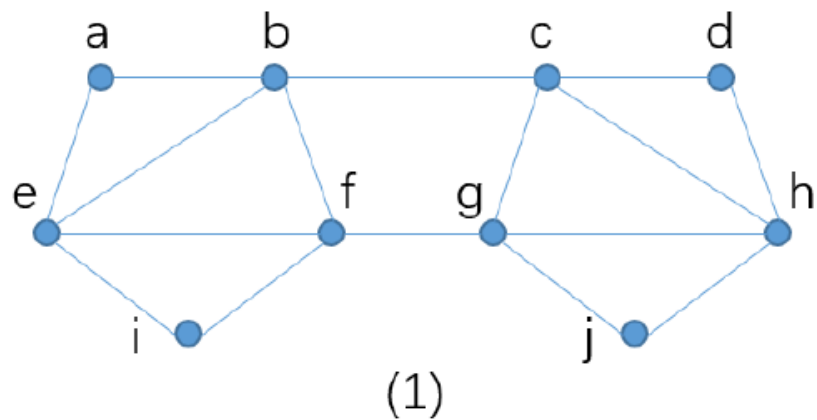
助教：林辰，李景荣，赖司贤

主讲人：林辰

Problem Set 25

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。



Problem 2

对哪些 m 和 n 值来说, 完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

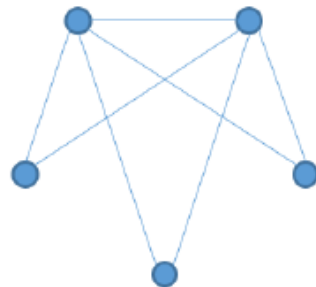
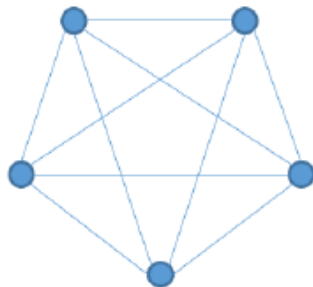
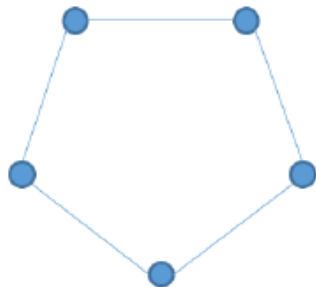
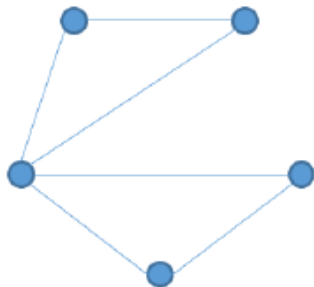
1) 欧拉回路?

2) 欧拉通路?

Problem 3

请找出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图，画图示意即可）。

答案：



Problem 4

证明或反驳：若无向简单图 G_1 和 G_2 是顶点数、边数均相等的欧拉图，则 G_1 和 G_2 同构。

Problem 5

证明：带有奇数个结点的二分图没有哈密顿回路。

Problem 6

若无向简单图 G 有欧拉通路，证明或反驳：

- 1) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中存在欧拉通路。
- 2) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中不存在欧拉通路。

Problem 7

给定无向简单图 G ($|G| \geq 3$), 定义线图 $L(G)$ 如下:

- 对 G 中的每条边, $L(G)$ 中恰好有一个顶点与之对应;
- $L(G)$ 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻 (即有一个公共顶点)。

Problem 8

友谊图：简单图 F 满足 $V(F) > 2$ 且对于任意 $u, v \in V(F)$, u, v 有且仅有一个共同的相邻节点（两个人只有唯一的共同的朋友），则称 F 是友谊图。

试证明：友谊图一定是欧拉图。

Problem 9

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$, 证明或反驳:

a) G 一定存在哈密顿回路。

b) G 一定存在哈密顿通路。

Problem 10

G 的结点数 n 大于 3, 假设结点 u 与 v 属于 G , u 与 v 不相邻, 且满足 $d(u) + d(v) \geq n$ 。证明: G 为哈密顿图当且仅当 $G + e$ 为哈密顿图, e 为 u 和 v 的新边。

Problem 11

对哪些 m 和 n 值来说, 完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密顿回路?

Problem 12

证明或反驳: 若 G 不是 2-连通图, 则 G 不是哈密尔顿图

Problem 13

证明或反驳: 如果二部图 G 是 H 图, 那么必有偶数个顶点

Problem 15

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

Problem 16

简单图 G 满足 $|G| > 2$, 令 m 为 G 的边数, n 为 G 的顶点数。试证明: 如果 $m > C_{n-1}^2 + 1$, 则 G 一定存在哈密尔顿回路。(提示: 可使用数学归纳法证明)

Problem Set 26

Problem 1

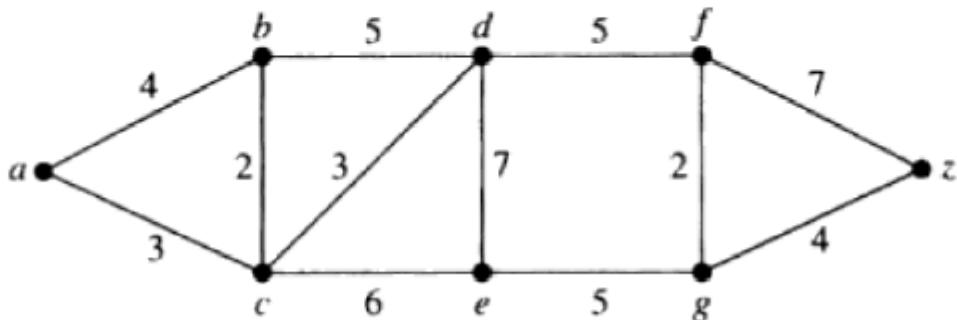
求以下带权图的下列顶点对之间的最短路（写出路径上的顶点和路径的权值）。

a) a 和 d

b) a 和 f

c) c 和 f

d) b 和 z



Problem 4

若边的权可以为负数, *Dijkstra* 算法能否正确求出最短路? 若可以, 请给出证明; 若不能, 请举出一个反例并分析说明.

Problem 5

证明或反驳：对于权值为正的简单连通图 G ，在已知图上任意两点间最短路长度的前提下，可以构建出 G 。

Problem 6

利用已有最短路算法，解决下列求简单加权（权均为正数）连通图上的最短通路长度的问题：

- a) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j ，且经过顶点 v_k 的最短通路长度（为保证通路最短，可以经过同一个顶点多次）；
- b) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j ，且不经过顶点 v_k 的最短通路长度；
- c) 求从顶点 v_i 出发，先经过顶点 v_k ，再到达顶点 v_j 的最短通路长度（即在到达 v_k 前不得经过顶点 v_j ）。

Problem 7

求下图中以 A 为源点到图中其他所有点的最短路. 请按顺序写出路径上的点, 并给出各路径的权值.

