

第三次习题课

赖司贤

Problem 1

设集合 $A = \{a, b, c\}$, 判定以下结论是否正确.

(a) $\emptyset \subseteq A \times A$

(b) $\{a, b\} \in A \times A$

(c) $\{a, c\} \in A$

(d) $(c, c) \in A \times A$

Problem 2

证明: $A \times B \neq B \times A$ 除非 (unless) $A = B$, 其中 A 和 B 均为非空集合.

Problem 3

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系. 从集合 B 到集合 A 的逆关系记做 R^{-1} , 即有序对 $\{(b, a) | (a, b) \in R\}$ 的集合, 补关系 \bar{R} 是有序对 $\{(a, b) | (a, b) \notin R, a \in A, b \in B\}$ 的集合.

设 R 是正整数集合上的关系, $R = \{(a, b) | a \text{ 整除 } b\}$, 试求:

(a) R^{-1}

(b) \bar{R}

Problem 4

设 R 是关系 $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$, S 是关系 $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$, 求 $S \circ R$. (以右先制计算)

Problem 5

设 R 是定义在具有博士学位的人的集合上的关系, $(a, b) \in R$ 当且仅当 a 是 b 的论文导师. 请问什么情况下一个有序

对 (a, b) 在 R^2 中? 什么情况下一个有序对 (a, b) 在 R^n 中? 这里 n 是正整数. (注意每个具有博士学位的人都有一个论文导师.)

Problem 6 (注：同余的概念和定义可参考中文第八版教科书 p. 216 定义3)

设 R_1 和 R_2 分别是整数集合上的“模3同余”和“模4同余”关系，即 $R_1 = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{3}\}$ 和 $R_2 = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{4}\}$. 试求：

(a) $R_1 \cup R_2$

(b) $R_1 \cap R_2$

(c) $R_1 - R_2$

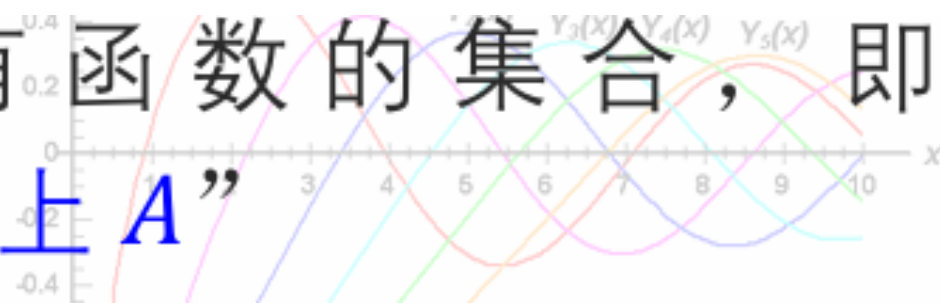
(d) $R_2 - R_1$

(e) $R_1 \oplus R_2$

Problem 7

- a) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个不同的关系?
- b) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个关系包含有序对 (a, a) ?

- 记 B^A 为 A 到 B 的所有函数的集合，即 $\{F|F:A \rightarrow B\}$ ，读作“ B 上 A ”



■ 定义：设 $f: A \rightarrow B$

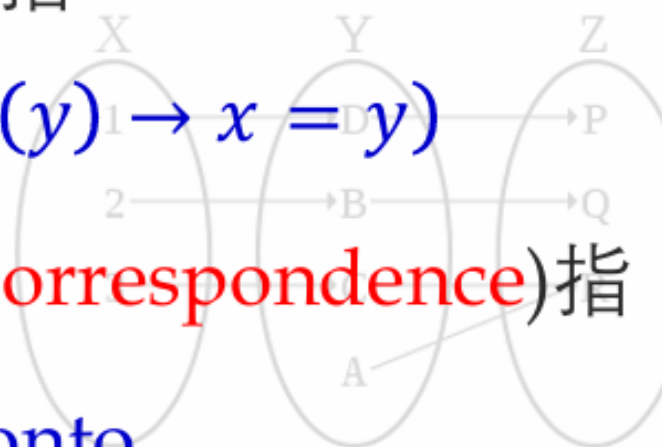
(1) f 为 **满射** (surjection / **onto**) 指 $\text{Ran}(f) = B$

(2) f 为 **单射** (injection / **1-1**) 指

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

(3) f 为 **双射** (bijection / **1-1 correspondence**) 指

f 为 1-1 且 onto

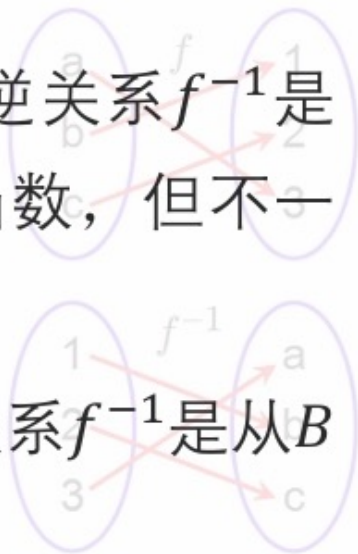




逆关系与函数



- 函数的逆关系不一定是函数，可能只是一个二元关系
- (1) 任给单射函数 $f: A \rightarrow B$ ，则逆关系 f^{-1} 是函数，且是 $\text{Ran}(f)$ 到 A 的双射函数，但不一定是 B 到 A 的双射函数
- (2) 对双射函数 $f: A \rightarrow B$ ，则逆关系 f^{-1} 是从 B 到 A 的双射函数，即 $f^{-1}: B \rightarrow A$



强化练习

Problem 1

设 a, b, c 各不相同，判断下列式子的真假。

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

b) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

c) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

d) $\{\{a, b\}, c, \emptyset\} = \{\{a, b\}, c\}$

e) $\{\{a\}, \{b\}\} = \{\{a, b\}\}$

f) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b\} = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, a, b\}$

Problem 8

设 A, B, C, D 为集合，证明： $(A - B) \times (C - D) \subseteq (A \times C) - (B \times D)$ 。

Problem 6

如果集合 A, B, C 满足下述条件，你能判断 $A = B$ 吗？能的话给出理由，不能的话给出反例。

a) $A \cup C = B \cup C$

b) $A \cap C = B \cap C$

c) $A \cup C = B \cup C$ 且 $A \cap C = B \cap C$