1 南京大学工程管理学院2025-2026学年第一学期《运筹学1》期中测验

整理：吻安

转学院工程管理系&自动化系&工管学协920882951独家发布

1. (16') 某工厂要用 A, B 两种原料来生产甲, 乙, 丙三种产品, 生产单位每种产品的原料消耗量和利润如下表所列:

	甲	乙	丙
原料A	6	3	5
原料B	3	4	5
利润	4	1	5

若现有A，B原料的限量分别为45和30，求：

1. 总利润最大的生产方案。
2. 甲产品的单位利润在何范围内变化时，最优生产方案不变。
3. 若原料B可以再购，市场单价为0.5。请问是否应该购进?

2 (14') 考虑线性规划问题:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

若其最优基变量为 $\{x_1, x_2\}$ ，并且最优基矩阵的逆为：

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 请给出该问题及其对偶问题的最优解；
2. 请问目标函数中变量 x_3 的系数在何范围变化时最优解不变?
3. 请问约束条件 $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$ 的右端项在何范围变化时最优基不变?

3.(10') 考虑线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
&\min z = -\alpha x_n \\
&\ s.t.\quad x_1 \qquad\qquad\qquad\quad \le 1 \\
&-2x_1 + x_2 \quad \le 1 \\
&\ -2x_2 + x_3 \quad \le 1 \\
&\qquad\quad \vdots \\
&-2x_{n-1} + x_n \le 1 \\
&x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

这里 α 是一个正数。假定我们给约束条件加上松弛变量可以使得问题转化为标准形式。

1. 考虑以 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 为基变量的基本解，证明其为基本可行解。

2. 证明 (1) 中定义的基本解是最优的。

已知

$$
\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 2^2 & 2 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}
$$

4. (12') 现有一个线性规划问题 (P1):

$$
\max z_1 = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}
$$
$$
s.t. \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{cases}
$$

其中，$A \in R^{m\times n}, \mathbf{b} \in R^m, \mathbf{c} \in R^n$ 。它的对偶问题的最优解为 $\boldsymbol{y}^* \in R^m$ 。另有一线性规划问题（P2）:

$$
\max z_2 = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}
$$
$$
s.t. \begin{cases} Ax \le b + d \\ x \ge 0 \end{cases}
$$

其中，$d \in R^m$ 。

1. 分别写出线性规划问题 (P1) 和 (P2) 的对偶问题;

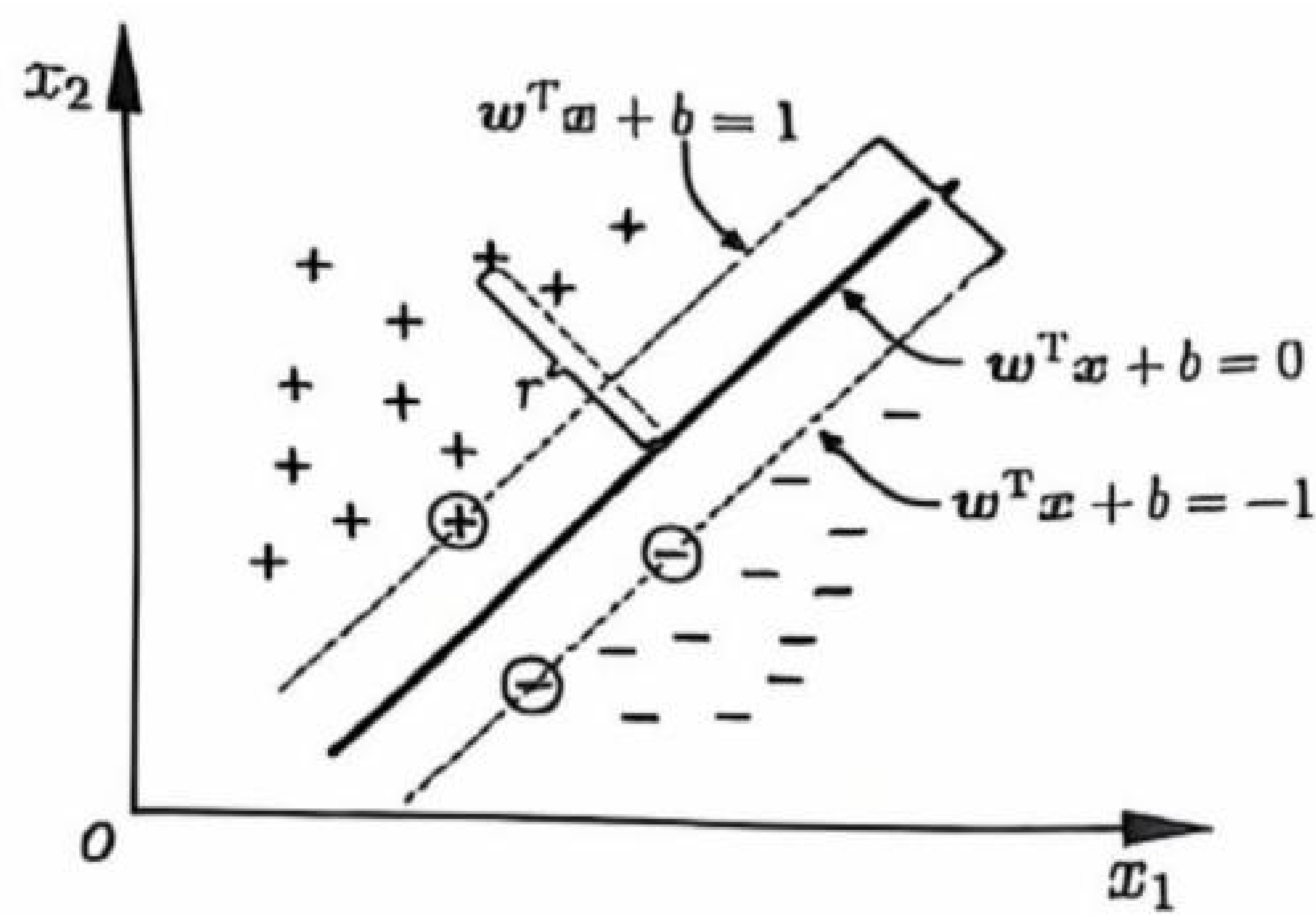
2. 证明: $\max z_2 \le \max z_1 + \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{y}^*$ 。

5.(10') 甲、乙两人玩 “石头、剪刀、布” 的游戏, 每人可以各自选择出石头、剪刀或布。玩家甲的收益矩阵是:

$$
\begin{array}{c}
\\
\text{石头} \\
\text{剪刀} \\
\text{布}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{石头} & \text{剪刀} & \text{布} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

从甲的角度考虑, 假设在这个博弈中甲采取的策略是以概率 x_1 出 "石头", 概率 x_2 出 "剪刀", 概率 x_3 出 "布" (即 $x_1+x_2+x_3=1$)。那么在乙出不同策略时, 甲的期望收益可能是不一样的。若甲希望在最差情况下保证最大的期望收益, 请写出该策略所对应的线性规划模型。

6. (10') 支持向量机是机器学习中的一种分类学习方法。假设如图有两类差异性数据: 第一类数据点 "+" 表示为 $\mathbf{x}_i=(x_1^i,x_2^i)\,,i=1,\ldots,m$, 标记为 +1; 第二类数据点 "-" 表示为 $\mathbf{x}_j=\left(x_1^j,x_2^j\right),j=1,\ldots,n$, 标记为 -1 。数学上, 分类学习就是想找到一条直线 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+b=0$, 可以将不同类别的数据点划分开, 即找到一个斜率 (法向量) $\boldsymbol{\omega}$ 和一个截距 b 。



若两类数据能完全线性可分，则可以满足下列的不等式约束：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{x}_i + b \geq 1, \forall i = 1, \dots, m \\ \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{x}_j + b \leq -1, \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

但现实中可能无法做到完全线性可分，那么就希望划分错误的误差越小越好。请建立合适的目标规划模型。

7. (14') 下表是一张运输单价表（单位：元/件）。假定对销地不满足需求将造成经济损失，其中销地 B2，B3 的单位损失费用分别为 3 元和 2 元，销地 B1 的需求量必须满足，请给出最佳运输方案。

销地 产地	B1	B2	B3	供应量（件）
A1	5	1	7	10
A2	6	4	6	80
A3	3	2	5	15
需求量（件）	75	20	50	

8. (14') 考虑如下的线性规划问题:

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\ 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (*) \end{array}$$

其中 $p_i > 0, w_i > 0$ 。早在1957年，Dantzig证明上述线性规划问题可以利用贪心算法快速求解。具体求解步骤如下：

- 第一步：排序使得 $\frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{p_n}{w_n}$ ；
  第二步：求出整数 $s = \max\{N | w_1 + w_2 + \cdots + w_N \leq W\}$

在此基础上，该问题的最优解为：

$$x_i = 1, \qquad i = 1, \dots, s$$

$$x_i = 0, \quad i = s+2, \dots, n$$

$$x_{s+1} = \frac{W - \sum_{i=1}^{s} w_i}{w_{s+1}}$$

1. 请利用Dantzig的结论求解如下的线性规划问题：

$$\max 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 4x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1+5x_2+6x_3+3x_4 \le 13 \\ 0 \le x_i \le 1, i=1,\ldots,4 \end{cases}$$

2. 请写出题目中给的一般线性规划问题 (*) 的对偶问题，并利用 Dantzig 给出的原问题的最优解求对偶问题的最优解。

附参考答案（不完整）：
1.（1）...

所以最优生产方案为生产甲产品5，乙产品0，丙产品3，此时最大利润为35.

（2）由 $\Delta c_B^T B^{-1} p_j \le r_j, j=2,4,5$ ，得：

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\Delta c_1 \le \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3}\Delta c_1 \le \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\Delta c_1 \le \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -2 \le \Delta c_1 \le 1$$

所以甲产品的利润变化范围为 [3,6]。

（3）因为购买原料 B 的单价 0.5 小于其影子价格 2/3 , 所以应该购进。

2. 解：（1）原问题最优解 $\mathbf{x}^\star = (1,2,0)^T$

对偶问题最优解 $c_B^T B^{-1} = (2,3)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (5,1)$

（2）$\sigma_3' = c_3 - C_B B^{-1} P_3 = c_3 - (5,1)\binom{1/3}{7/3} = c_3 - 4 \le 0, \quad c_3 \le 4$

（3）$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b_1 - 3 \\ -b_1 + 3 \end{pmatrix} \ge 0, \frac{3}{4} \le b_1 \le 3$

3. 解：（1）以 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x$ 为基变量，由约束条件可以得到：

$$x_1 = 1 \ge 0, x_2 = 1 + 2x \ge 1 + 0 \ge 0, \ldots, x_n = 1 + 2x_{n-1} \ge 1 + 0 \ge 0$$

因此，该基本解 $\{x = 2^t - 1\}$ 是基本可行解。

（2）利用最优性条件, 若 $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \ge 0$ 则为最优解。这里,

$$c_N^T = (0,0,0,\cdots,0), c_B^T = (0,0,0,\cdots,0,-\alpha)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 2^2 & 2 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = I$$

所以

$$c_N^T - c_B^T = (2^{n-1}, 2^{n-2}, ..., 1) \cdot \alpha \geq 0$$

4....

$$\min \omega = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})^T \boldsymbol{y}$$

$$s.t. \begin{cases} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq 0 \end{cases}$$

问题 1 的对偶问题与问题 2 的对偶问题具有相同的约束条件，因此问题 1 的对偶问题的最优解 $y^* = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$ 一定是问题 2 的对偶问题的可行解。

令问题2的对偶问题的最优解为 $\widehat{y}^*$ ，则

$$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})^T \hat{\boldsymbol{y}}^* \leq (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})^T \boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^* + \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{y}^*$$

因为原问题与对偶问题的最优值相等，所以：

$$\max z_2 \leq \max z_1 + d^T y^*$$

5. 解：甲采取的策略的数学规划模型为：

$$\max \min \{x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1\}$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

转化为线性规划模型如下：

max s

$$s.t. \begin{cases} x_3 - x_2 \geq s \\ x_1 - x_3 \geq s \\ x_2 - x_1 \geq s \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6. 解：设第一类数据被划分错的误差为 δ_i^+, δ_i^- ，第二类数据被划分错的误差为 δ_j^+, δ_j^- ，则

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i \delta_i^- + \sum_j \delta_j^+ \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases} \omega^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i + b + \delta_i^- - \delta_i^+ = 1, & \forall i = 1, \ldots, m \\ \omega^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j + b + \delta_j^- - \delta_j^+ = -1, & \forall j = 1, \ldots, n \\ \delta_i^+, \delta_i^-, \delta_j^+, \delta_j^- \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

7. 解：

产地/销地	B1	B2	B3	产量
A1	5	1	7	10
A2	6	4	6	80
A3	3	2	5	15
Dummy	100000	3	2	40
销量	75	20	50	
总成本	595			
产地/销地	B1	B2	B3	产量
A1	0	10	0	10
A2	60	10	10	80
A3	15	0	0	15
Dummy	0	0	40	40
销量	75	20	50	

8. 解：(1) 由于 $\frac{7}{4} > \frac{8}{5} > \frac{9}{6} > \frac{4}{3}$ 故而不需要另外排序；由于 $4+5 < 13, 4+5+6 > 13$ 故 $s=2$ ，从而最优解为：$x_1 = x_2 = 1, x_4 = 0, x_3 = \frac{13-4-5}{6} = \frac{2}{3}$ 。线性规划松弛问题的最优解为 $(1, 1, \frac{2}{3}, 0)$ ，最优值为21。

4 6 3

故 $s = 2$ ，从而最优解为：$x_1 = x_2 = 1, x_4 = 0, x_7 = \frac{13-4-5}{6} = \frac{2}{3}$ 。线性规划松弛问题

题的最优解为 $(1, 1, \frac{2}{3}, 0)$ ，最优值为 21.

(2) 对偶问题:

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i + Wy$$

$$s.t. w_i y + y_i \geq p_i, i = 1, \dots, n$$

$$y \geq 0, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

利用互补松弛条件可得:

$$i = 1, 2, \dots, s+1, \quad w_i y + y_i = p_i;$$

$$i = s+1, s+2, \dots, n, \quad y_i = 0;$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{p_{s+1}}{w_{s+1}};$$

$$y_i = p_i - \frac{p_{s+1}}{w_{s+1}} w_i, i = 1, 2, \dots, s;$$

$$y_i = 0, \quad i = s+1, \dots, n.$$